

直角座標系

一、直角坐標系

已知 (a^3, ab) 落在第二象限，則下列各點在第幾象限(1) $(a^2, -b)$ (2) $(a+b, b^3)$ (3) (b, ab^2) 。

二、距離公式

1. 已知 $A(2, -1)$ ， $B(3, 2)$ ， $C(9, 0)$ ，求周長並判斷 $\triangle ABC$ 為何種三角形。

2. 已知 $A(3, -1)$ ， $B(2, 5)$ ， $C(4, k)$ ，且 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，求 k 之值。

三、中點公式

1. $A(5, -4)$ ， $B(1, 6)$ ，求 \overline{AB} 之中點坐標。

2. 已知 $A(6, 3)$ ， $B(-2, -8)$ ， $C(2, -2)$ ，求 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的中線長。

3. 已知直徑之兩端點為 $A(5, -1)$ ， $B(-3, 5)$ ，求圓心及半徑之值。

4. 已知 $A(5, 2)$ 且 \overline{AB} 中點為 $(2, -5)$ ，求 B 點座標。

5. 已知 $A(7, -5)$ ， $B(2, 3)$ ， $C(-2, 1)$ ，若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，求 D 點座標。

四、重心公式

1. $\triangle ABC$ 之三頂點 $A(2, -5)$ ， $B(4, 1)$ ， $C(-3, 10)$ ，求 $\triangle ABC$ 之重心。

2. $\triangle ABC$ 三邊之中點分別為 $D(5, 3)$ ， $E(a, -1)$ ， $F(7, b)$ ，若 $\triangle ABC$ 之重心為 $(3, -2)$ ，求 $a+b$ 之值。

3. 已知 $A(7, -1)$ ，若 \overline{AB} 之中點為 $(3, 5)$ ，且 $\triangle ABC$ 之重心為 $(-1, 3)$ ，求 B 、 C 坐標。

五、分點公式

1. 已知 $A(-2, 4)$ ， $B(5, -10)$ ， P 點介於 A ， B 之間，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$ ，求 P 點坐標。

2. 已知 $A(-3, 5)$ ， $B(4, -2)$ ， C 點介於 A ， B 之間，且 $3\overline{AC} = 4\overline{BC}$ ，求 C 點坐標。

3. 已知 $A(-3, 6)$ ， $B(6, -9)$ ， P 點在 \overline{AB} 之外，且 $5\overline{AP} = 2\overline{BP}$ ，求 P 點坐標。

練習題

一、直角坐標系

已知 $b > 0 > a$ ，則下列各點在第幾象限(1) $\left(\frac{a}{b}, -a\right)$ (2) $(a-b, ab)$ (3) (a^2, b^3) 。

二、距離公式

1. 已知 $A(1, 1)$ ， $B(8, 2)$ ， $C(4, 5)$ ，求周長並判斷 $\triangle ABC$ 為何種三角形。

2. 已知 $A(-1, 2)$ ， $B(5, k)$ ， $\overline{AB} = 3\sqrt{5}$ ，求 k 之值。

三、中點公式

1. $A(3, k)$ ， $B(-7, 4)$ ， \overline{AB} 之中點坐標為 $(h, 1)$ ，求 $h+k$ 之值。

2. $A(2, -1)$ ， $B(8, -3)$ ， $C(9, 1)$ ， \overline{AB} 之中點為 M ，求 \overline{MC} 之長度。

3. 平面上兩點 $A(a, 6)$ ， $B(2, b)$ ，已知 \overline{AB} 為某圓之直徑，且圓心座標為 $(-1, 6)$ ，求 $a+b$ 。

4. 已知 $Q(-3, 4)$ ， $P(x, y)$ ，若 \overline{PQ} 中點為 $(-5, 1)$ ，求 $x-y$ 之值。

5. 已知 $A(3, h)$ ， $B(2h, 3)$ ， $C(-4, k)$ ， $D(-k, 7)$ 若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，求 h, k 之值。

四、重心公式

1. 已知 $P(9, -1)$ ， $Q(1, -7)$ ， $C(5, -4)$ ，求 $\triangle PQR$ 之重心。

2. $\triangle ABC$ 三邊之中點分別為 $D(2, -1)$ ， $E(9, 5)$ ， $F(-2, -1)$ ，求 $\triangle ABC$ 之重心。

3. 已知 $A(2, -5)$ ， $B(3, 5)$ 兩點且 $\triangle ABC$ 重心之為 $(-1, 3)$ ，求 C 坐標。

五、分點公式

1. $A(1, 1)$ ， $B(-5, 4)$ ， P 點在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP}:\overline{BP} = 2:1$ ，求 P 點座標。

2. 已知 $A(5, 8)$ ， $B(-3, 4)$ ， P 點介於 A, B 之間，且 $\overline{AB} = 4\overline{BP}$ ，求 P 點座標。

3. 已知 $A(-2, 5)$ ， $B(4, -3)$ ， B 點介於 A, C 之間，且 $\overline{AB}:\overline{BC} = 2:1$ ，求 C 點座標。

六、三角形面積公式

1. 已知 $A(1, 2)$ ， $B(3, 5)$ ， $C(-1, 6)$ 三點，求 $\triangle ABC$ 之面積。
2. 若 $(2, 3)$ ， $(-3, -1)$ ， $(-2, 5)$ ， $(6, 0)$ 四邊形之四頂點，求四邊形之面積。

七、函數值的求法

1. (1) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ ，求 $f(2)$ 。 (2) $f(x) = \frac{2x-3}{3x+5}$ ，求 $f(-1)$ 。
2. $f(x) = 3x^2 - kx + 7$ ，若 $f(2) = 3$ ，求 k 之值。
3. $f(2x-1) = \frac{6x+1}{2x-7}$ ，求 $f(-4)$ 。
4. $f\left(\frac{x+2}{4x+3}\right) = x^2 - 3x + 4$ ，求 $f\left(\frac{1}{3}\right)$ 。
5. $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 4x + 5 & x \geq 2 \\ 4x - 7 & x < 2 \end{cases}$ ，求 $f(-2) + f(3)$ 之值。
6. $f(x) = x^2 + 1$ ， $g(x) = 3x - 2$ ，求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$ 。
7. $f(x) = x^2 - 2$ ， $g(x) = 2x + 7$ ，求 $f(g(-1))$ 及 $g(f(3))$ 。
8. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 130 & x > 4 \\ \sqrt{x^2 + 16} & 2 < x \leq 4 \\ |3x - 2| & x \leq 2 \end{cases}$ ，求 $f(f(f(3)))$ 之值。
9. $f(x) = f(x+3)$ ， $f(-x) = -f(x)$ 且 $f\left(\frac{5}{2}\right) = 7$ ，求 $f\left(\frac{13}{2}\right)$ 。

六、三角形面積公式

1. 已知 $A(4, -3)$ ， $B(3, 1)$ ， $C(-1, x)$ 若 $\triangle ABC$ 之面積為 7，求 x 之值。
2. 若 $A(3, 7)$ ， $B(-3, 2)$ ， $C(-1, -2)$ ， $D(4, -3)$ 為四邊形 $ABCD$ 之四頂點，求四邊形 $ABCD$ 之面積。

七、函數值的求法

1. (1) $f(x) = 3x + 2$ ，求 $f(0)$ 。 (2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ ，求 $f(3)$ 。
2. 已知 $f(x) = 5x^4 + 8x^3 + ax^2 + 3x + b$ ，若 $f(-2) = -6$ ，且 $f(1) = 6$ ，求 $a - b$ 之值。
3. $f(x - 2) = x^3 + 6$ ，求 $f(1)$ 。
4. $f\left(\frac{3x+1}{2x-1}\right) = \frac{x+1}{3x+2}$ ，求 $f\left(\frac{5}{3}\right)$ 。
5. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & x > 5 \\ \sqrt{x^2 + 16} & 2 < x \leq 5 \\ |3x - 2| & x \leq 2 \end{cases}$ ，求 $f(-2) + f(3) + f(8)$ 之值。
6. $f(x) = 2x - 1$ ， $g(x) = x^2 - x + 2$ ，求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$ 。
7. $f(x) = 5 - 3x$ ， $g(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ ，求 $f(g(3))$ 及 $g(f(-1))$ 。
8. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x - 7 & x \geq 0 \\ 3x + 2 & x < 0 \end{cases}$ ，求 $f(f(0))$ 之值。
9. $f(x) = f(x+7)$ ， $f(-x) = -f(x)$ ， $f(2) = 10$ 求 $f(-12)$ 及 $f(40)$ 之值。

八、二次函數的頂點與極值

題型一：求頂點與極值

1. 求二次函數 $y = -x^2 + 10x - 23$ 圖形之頂點座標。
2. 求二次函數 $f(x) = 2x^2 - 6x + 13$ 之最小值。
3. 二次函數 $y = -2x^2 + 8x - 5$ ，當 $x = a$ 時有極大值 b ，求 $5a + 2b$ 之值。

題型二：已知頂點或極值，求函數的未知數

1. 二次函數 $y = -3x^2 + mx + n$ ，最高點座標為 $(2, -3)$ ，求 $m - n$ 之值。
2. 二次函數 $y = ax^2 + bx + 3$ 之頂點為 $(2, -3)$ ，求 a 、 b 之值。

題型三：定義域有限制之二次函數求極值

1. 二次函數 $f(x) = x^2 - 6x + 2$ ， $2 \leq x \leq 5$ ，求 $f(x)$ 之最大值及最小值。
2. 二次函數 $y = 3x^2 + x - 7$ ， $0 \leq x \leq 2$ ，求 y 之最大值及最小值。

九、二次函數的函數值恆正或恆負

1. 二次函數 $y = x^2 - (4 - k)x + (k - 1)$ 恆正，求 k 之範圍。
2. 滿足二次函數 $y = (m + 6)x^2 + (2m + 5)x + m$ 恆正，求 m 之範圍。

八、二次函數的頂點與極值

題型一：求頂點與極值

1. 求二次函數 $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ 圖形之最低點座標。
2. 求二次函數 $y = -3x^2 + 18x - 25$ 之最大值。
3. 二次函數 $y = 3x^2 + 6x + 1$ ，當 $x = h$ 時有極小值 k ，求 $h + k$ 之值。

題型二：已知頂點或極值，求函數的未知數

1. 二次函數 $y = x^2 + bx + c$ 之頂點為 $(-3, -1)$ ，求 b 、 c 之值。
2. $y = ax^2 - 4x + c$ ，當 $x = 1$ 時有極小值 -2 ，求 $2a + c$ 之值。

題型三：定義域有限制之二次函數求極值

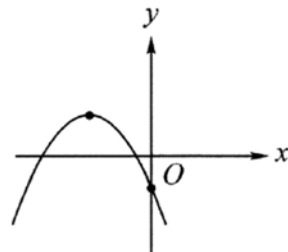
1. 二次函數 $y = -2x^2 + 8x + 5$ ， $-1 \leq x \leq 5$ ，求 y 最大值及最小值。
2. 二次函數 $f(x) = -x^2 + 10x - 4$ ， $-2 \leq x \leq 2$ ，求 $f(x)$ 最大值及最小值。

九、二次函數的函數值恆正或恆負

1. 二次函數 $y = -2x^2 - 6x + (c + 3)$ 恆負，求 c 之範圍。
2. 二次函數 $y = (k - 2)x^2 + 2x + 1$ 恆正，求 k 之範圍。

自我修練

- () 1. 在直角坐標平面上，點 $A(2, -3)$ ，點 $B(-4, -1)$ ，則 \overline{AB} 之中點與 x 軸之距離為 (A)1 (B)2 (C)3 (D)4。
- () 2. 若函數 $y = x^2 + (k-2)x + (2-k)$ 之圖形與 x 軸不相交，則 k 之範圍為 (A) $k = 2$ 或 -2 (B) $-2 < k < 2$ (C) $k < -2$ 或 $k > 2$ (D) $k < -1$ 或 $k > 3$ 。
- () 3. 拋物線 $y = -x^2 - 4x + 8$ 之頂點至點 $(3, 0)$ 之距離為 (A)10 (B)11 (C)12 (D)13。
- () 4. 設點 $A = (5, 3)$ ，點 $B = (2, -6)$ ，且 M 是 AB 線段的中點，若 M 點的坐標為 (x, y) ，則下列何者錯誤？ (A) M 在第四象限 (B) $x - y > 0$ (C) $x + y > 5$ (D) $xy < 10$ 。
- () 5. 設 $f(x) = 3x - 1$ ， $g(x) = x^2$ ，令 $a = f(g(1))$ ， $b = g(f(1))$ ，則 $a + b$ 之值為 (A)6 (B)8 (C)10 (D)12。
- () 6. 關於函數 $f(x) = x^3 + 2$ 之描述，下列何者錯誤？ (A)點 $(2, 10)$ 落於 f 的圖形上 (B)點 $(-1, f(-1))$ 在第三象限 (C) $f(-3) < f(-2)$ (D) $f(0) > 0$ 。
- () 7. $y = -x^2 + px + q$ ，若圖形的最高點為 $(2, 6)$ ，則 $p + q = ?$ (A)2 (B)4 (C)6 (D)8。
- () 8. 設一平行四邊形 $ABCD$ ，已知 $A(3, 4)$ ， $B(2, 5)$ ， $C(-1, -2)$ ，則 D 為 (A) $(-4, 3)$ (B) $(0, -3)$ (C) $(-3, 4)$ (D) $(2, 1)$ 。
- () 9. 設 $f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 12x - 5$ ，則 $f(3) =$ (A)1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{5}{4}$ 。
- () 10. 設 $f(x) = x^2$ ， $g(x) = 2x + 1$ ，則下列何者正確？ (A) $f(1) + g(2) = 5$ (B) $(g(3))^2 = 9$ (C) $(f(2))^2 = 4$ (D) $\frac{g(6)}{f(2)} = 3$ (E) $g(f(2)) = 9$ 。
- () 11. 已知函數 $f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x > 5 \\ x^2 - 2, & -1 < x \leq 5 \\ 4x - 1, & x \leq -1 \end{cases}$ ，則 $f(5) + f(0) + f(-3) =$ (A)18 (B)-5 (C)7 (D)8。
- () 12. 設 A 、 B 、 P 三點共線且 $A(1, 3)$ 、 $B(5, 11)$ 、 P 介於 A 、 B 二點之間，又 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 3$ ，則 P 點坐標為何？ (A) $(4, 9)$ (B) $(7, 15)$ (C) $(2, 5)$ (D) $(8, 18)$ 。
- () 13. 設 $A(-3, 1)$ 、 $B(1, 3)$ 為坐標平面上二點， $P(a, b)$ 在 \overline{AB} 上且三點依序為 $A - B - P$ ，又 $\overline{AP} : \overline{PB} = 3 : 1$ ，則 $a + b =$ (A)2 (B)7 (C)16 (D)20。
- () 14. 已知函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 之圖形如右，則下列何者錯誤？ (A) $b < 0$ (B) $c < 0$ (C) $b^2 - 4ac > 0$ (D) $a + b + c > 0$ 。
- () 15. 若點 $(b, a - b)$ 在第一象限，則點 $(-a, a + b)$ 在第幾象限？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四。



1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
B	B	D	C	A	B	C	B	A	E	D	C	B	D	B