

## 重複組合

要講重複組合之前，先看看下面的問題：

- (1) 從排球、籃球、足球三種球中選取5球，有多少種可能的選法？（每種球的個數至少有5個）
- (2) 三元一次方程式  $x+y+z=5$  的非負整數解  $(x, y, z)$  有多少組？
- (3) 將5個相同的白球全部分給甲、乙、丙三人，有多少種分法？

在問題(1)中，如果排球、籃球、足球分別取出  $x, y, z$  個，那麼  $(x, y, z)$  就是滿足  $x+y+z=5$  的非負整數解；在問題(3)中，如果甲、乙、丙各分得  $x, y$  與  $z$  個白球，那麼  $(x, y, z)$  也是滿足  $x+y+z=5$  的非負整數解；也就是說，問題(1)、(2)與(3)的答案是完全一樣的。

究竟這3個問題的共同答案是多少呢？就以問題(3)為例，討論如下：

$x=0$  時， $y+z=5$ ，故  $(y, z) = (0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0)$ ，有6組。

$x=1$  時， $y+z=4$ ，故  $(y, z) = (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$ ，有5組。

$x=2$  時， $y+z=3$ ，有4組； $x=3$  時， $y+z=2$ ，有3組。 $x=4$  時， $y+z=1$ ，有2組。

$x=5$  時， $y+z=0$ ，有1組。

因此方程式  $x+y+z=5$  非負整數解的個數為  $6+5+4+3+2+1$ ，這個解法很清楚，但效率差一些。現在我們換個方式來處理，說明如下：

我們把5個相同的白球以「○」表示與2個分隔記號「|」共7個事物排成一列，兩個分隔記號「|」會將白球分成左、中、右三區，將左區的球分給甲，中區的球分給乙，右區的球分給丙。

例如，

(a) ○○|○○|○的排列  $\Leftrightarrow$  代表甲、乙、丙各分得2,2,1個白球；

(b) ○○○||○○的排列  $\Leftrightarrow$  代表甲、乙、丙各分得3,0,2個白球；

(c) ||○○○○○的排列  $\Leftrightarrow$  代表甲、乙、丙各分得0,0,5個白球；

像這樣，將5個白球分給甲、乙、丙三人的分法就是把5個「○」與2個「|」作直線排列的排法。利用前面有相同物的排列公式，排法有  $\frac{(5+2)!}{5! \cdot 2!} = 21$ （種）。

我們把「從  $n$  類事物中選取  $k$  個為一組（每類均至少有  $k$  個且可以重複選取）」的組合方式稱為  $n$  中取  $k$  的**重複組合**，其總數以  $H_k^n$  表示，例如從排球、籃球、足球三種球中選取5球，有  $H_5^3$  種選法。

仿照問題(1)，(2)與(3)的討論，可以知道：

「 $n$ 元一次方程式  $x_1+x_2+\dots+x_n=k$  的非負整數解個數」及「將  $k$  個相同的白球分給  $n$  個人的分法數」，也都是  $H_k^n$ ，而且  $H_k^n$  就是將  $k$  個「○」與  $n-1$  個「|」作直線排列的排法(如圖)，

即  $H_k^n = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_k^{n+k-1}$ 。



我們得到如下的重複組合公式：

### 重複組合

下列三個問題的組合數都是  $H_k^n$ ，而且  $H_k^n = C_k^{n+k-1}$ 。

- (1) 從  $n$  類事物中選取  $k$  個的組合（每類的個數均至少  $k$  個且可以重複選取）。
- (2)  $n$  元一次方程式  $x_1+x_2+\dots+x_n=k$  的非負整數解。
- (3) 將  $k$  個相同的事物全部分給  $n$  個人的分法。

練習題

1. (1)  $H_3^7 =$  \_\_\_\_\_ ; (2)  $H_7^3 =$  \_\_\_\_\_ ; (3) 若  $C_8^n = C_{12}^n$  , 則  $H_n^3 =$  \_\_\_\_\_ 。

[ (1) 84 ; (2) 36 ; (3) 231 ]

2. 方程式  $x+y+z=10$  有多少組非負整數解? [ 66 組 ]

3. 中正桌球俱樂部擬購買 8 把桌球拍以供忘記攜帶球拍的會員使用，若球拍分為刀板、直拍與大陸拍 3 類，試問俱樂部有多少種不同的購買方式? [ 45 ]

4. 金二忠班有 8 位同學去買 4 種不同口味的冰淇淋，試問店員有多少種拿法? [ 165 ]

5. 將 9 本相同的練習簿任意分給 4 個小朋友，

(1) 共有幾種分法? (2) 若要求每人至少分到 1 本，則有多少種分法? [ (1) 220 ; (2) 56 ]

6. 設方程式  $x+y+z+u=12$ ，則：

(1) 其非負整數解? (2) 其正整數解? (3) 其正偶數解? [ (1) 455 ; (2) 165 ; (3) 10 ]