1-2　數線上的幾何

1.　設 a，b 為實數，且 $a<b$，則下列哪一個數最小?

(1) $\dfrac{a+b}{2}$　(2) $\dfrac{a+3b}{4}$　(3) $\dfrac{3a+b}{4}$　(4) $\dfrac{3a+2b}{5}$.

解　設 $A(a)$，$B(b)$，$a<b$，利用分點公式，$\dfrac{a+b}{2}$ 表 $\overline{AB}$ 中點，

$\dfrac{a+3b}{4}$ 和 $\dfrac{3a+b}{4}$ 為 $\overline{AB}$ 的四等分點，$\dfrac{a+3b}{4}>\dfrac{2a+2b}{4}>\dfrac{3a+b}{4}$，

$\dfrac{3a+2b}{5}$ 為 $\overline{AB}$ 的五等分點之一，且 $\dfrac{3a+2b}{5}=\dfrac{12a+8b}{20}>\dfrac{15a+5b}{20}=\dfrac{3a+b}{4}$，

故最小的數為 $\dfrac{3a+b}{4}$，答案為(3)．

PS：也可以用代數字的下去比較大小。

2.　數線上兩點 $A(9)$，$B(-6)$ ．求

(1) $\overline{AB}$ 的長．

(2) $\overline{AB}$ 的中點坐標．

(3)已知 P 點在 A，B 之間，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，求 P 點坐標．

(4)已知 Q 點為 $\overline{AB}$ 外一點，且 $\overline{AQ}:\overline{BQ}=5:2$，求 Q 點坐標．

解　(1) $\overline{AB}=|(9)-(-6)|=15$ ．

(2) $\overline{AB}$ 的中點坐標為 $\dfrac{9+(-6)}{2}=\dfrac{3}{2}$ ．

(3)設 $P(x)$ 點在 $\overline{AB}$ 上，根據分點公式

$$x=\frac{2\times 9+1\times(-6)}{1+2}=\frac{12}{3}=4\ .$$

(4)設 $Q(y)$ 點為 $\overline{AB}$ 外一點，依題意，得 $\overline{AB}:\overline{BQ}=3:2$ ．

根據分點公式，得 $-6=\dfrac{2\times 9+3\times y}{3+2}$，整理得 $-30=18+3y$，故 $y=-16$ ．

3. 解下列各式：

(1) $|x|=5$.　(2) $|x|>2$.　(3) $|x-1|>2$.　(4) $|2x-2|\le 2$.

解 (1) $x=5$ 或 -5 .

(2) $x>2$ 或 $x<-2$.

(3) $x-1>2$ 或 $x-1<-2$，得 $x>3$ 或 $x<-1$.

(4) $-2\le 2x-2\le 2 \Rightarrow 0\le 2x\le 4$，得 $0\le x\le 2$.

4. 解不等式 $3\le|3x+2|<5$.

解 因為 $3\le|3x+2|$，所以 $3x+2\ge 3$ 或 $3x+2\le -3$，即 $x\ge\frac{1}{3}$ 或 $x\le-\frac{5}{3}$，

因為 $|3x+2|<5$，所以 $-5<3x+2<5$，即 $-\frac{7}{3}<x<1$，

故得 $\frac{1}{3}\le x<1$ 或 $-\frac{7}{3}<x\le-\frac{5}{3}$.

5. 解不等式 $\begin{cases}|x-1|\ge 3\\ |2x+3|<5\end{cases}$.

解 因為 $|x-1|\ge 3$，所以 $x-1\ge 3$ 或 $x-1\le -3$，即 $x\ge 4$ 或 $x\le -2$，

因為 $|2x+3|<5$，所以 $-5<2x+3<5$，即 $-4<x<1$，

故得 $-4<x\le -2$.

6. 若 $|2x+a|\le b$ 的解為 $-9\le x\le 7$，求 a，b 的值 .

解 因為 $-9\le x\le 7$，且 -9 與 7 的中點為 -1，所以 $-8\le x+1\le 8$，因此

$$|x+1|\le 8 \Rightarrow |2x+2|\le 16 .$$

故 $a=2$，$b=16$.

7.　解不等式 $|x-1|+|x+4|\le 7$ ．

解　先將 $|x-1|=0$ 及 $|x+4|=0$ 的解 $x=1$ 和 $x=-4$ 標示在數線上，然後分段討論如下：

(1)當 $x<-4$ 時，$x-1<0$ 且 $x+4<0$，不等式爲 $-(x-1)-(x+4)\le 7$，

得 $x\ge -5$，故 $-5\le x<-4$ 爲不等式的解．

(2)當 $-4\le x<1$ 時，$x-1<0$ 且 $x+4\ge 0$，不等式爲 $-(x-1)+(x+4)\le 7$，

得 $5\le 7$，故 $-4\le x<1$ 爲不等式的解．

(3)當 $x\ge 1$ 時，$x-1\ge 0$ 且 $x+4\ge 0$，不等式爲 $(x-1)+(x+4)\le 7$，

得 $x\le 2$，故 $1\le x\le 2$ 爲不等式的解．

綜合上述(1)(2)(3)，得 x 的範圍爲 $-5\le x\le 2$ ．

8.　解 $|x+3|+|2x-1|=4$ ．

解　先將 $|x+3|=0$ 及 $|2x-1|=0$ 的解 $x=-3$ 和 $x=\frac{1}{2}$ 標示在數線上，然後分段討論如下：

(1)當 $x<-3$ 時，$x+3<0$ 且 $2x-1<0$，等式爲 $-(x+3)-(2x-1)=4$，

得 $x=-2$ ．此範圍內不等式無解．

(2)當 $-3\le x<\frac{1}{2}$ 時，$x+3\ge 0$ 且 $2x-1<0$，等式爲 $(x+3)-(2x-1)=4$，

得 $x=0$ ．

(3)當 $x\ge\frac{1}{2}$ 時，$x+3\ge 0$ 且 $2x-1\ge 0$，等式爲 $(x+3)+(2x-1)=4$，

得 $x=\frac{2}{3}$ ．

綜合上述(1)(2)(3)，得 $x=\frac{2}{3}$ 或 0 ．