1-2　級數

1.　求100到500的正整數中，所有13的倍數的總和．

解　由$100\div 13=7\cdots 9$，$500\div 13=38\cdots 6$，可知100到500的正整數中，所有13的倍數為首項$13\times 8=104$，公差13，共有$38-7=31$項的等差數列，

由等差級數的和公式$S_n=\dfrac{\left(2a_1+(n-1)d\right)\cdot n}{2}$，可得所有$13$的倍數的總和為

$\dfrac{(208+30\cdot 13)\cdot 31}{2}=9269$．

2.　已知等差數列$\langle a_n\rangle=\langle 100,\ 97,\ 94,\ \cdots\rangle$，且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，選出正確的選項：

(1)公差為3　　(2)$a_{33}=1$

(3)若$S_n<0$，則n的最小值為34　　(4)若$S_n<0$，則n的最小值為68．

解　(1)$d=97-100=-3$．

(2)$a_{33}=100+(33-1)(-3)=4$．

(3)(4)因為$S_n=\dfrac{n\left(2\cdot 100+(n-1)(-3)\right)}{2}=\dfrac{n(203-3n)}{2}<0$，又$n>0$，

所以$203-3n<0$，解得$n>67\dfrac{2}{3}$，因此滿足$S_n<0$的最小正整數n為68．

由上面的討論知道：正確的選項為(4)．

3.　設$\langle a_n\rangle$是一個首項為3，公比為$\dfrac{1}{2}$的等比數列，且$S_8=a_1+a_2+\cdots+a_8$．

選出正確的選項：

(1)$3<S_8<4$　　(2)$4<S_8<5$　　(3)$5<S_8<6$　　(4)$6<S_8<7$．

解

因為$S_8=a_1+a_2+\cdots+a_8=\dfrac{3[1-(\frac{1}{2})^8]}{1-\frac{1}{2}}=6[1-(\dfrac{1}{2})^8]=6-\dfrac{6}{2^8}$，

所以$5<S_8<6$．故正確的選項為(3)．

4.　設$\langle a_n\rangle$是一個等比數列，其中$a_3=3$，$a_5=27$，求$a_1+a_2+\cdots+a_5$的值．

解　由$a_5=a_3\cdot r^2$，得$r^2=\frac{27}{3}=9$，解得$r=\pm3$，又$a_3=3=a_1\cdot r^2=9a_1$，

解得$a_1=\frac{1}{3}$．

(1)當$r=3$時，$a_1+a_2+\cdots+a_5=\frac{\frac{1}{3}\left(3^5-1\right)}{3-1}=\frac{121}{3}$．

(2)當$r=-3$時，$a_1+a_2+\cdots+a_5=\frac{\frac{1}{3}\left((-3)^5-1\right)}{-3-1}=\frac{61}{3}$．

5.　將下列各級數用Σ表示：

(1) $72+68+64+\cdots+12$（等差級數）　　(2) $320-160+\cdots+5$（等比級數）

解　(1)因爲首項爲 72，公差爲-4，所以一般項

$$a_n=a_1+(n-1)d=72+(n-1)\cdot(-4)=76-4n,$$

又末項$12=76-4n$，解得$n=16$，因此等差級數共有16項．故

$$72+68+64+\cdots+12=\sum_{k=1}^{16}(76-4k).$$

(2)因爲首項爲320，公比爲$-\frac{1}{2}$，所以一般項

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}=320\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

又末項$5=320\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，解得$n=7$，因此等比級數共有 7 項．故

$$320-160+\cdots+5=\sum_{k=1}^{7}320\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

6.　求$1\times1+2\times3+3\times5+\cdots+n(2n-1)+\cdots+12\times23$的和．

解　原式用Σ表示為$\sum_{k=1}^{12}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{12}(2k^2-k)=2\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{12}k$

$$=2\times\frac{12(12+1)(2\times12+1)}{6}-\frac{12(12+1)}{2}$$

$$=1300-78=1222\ .$$

7.　求$1\times2^2+2\times3^2+3\times4^2+\cdots+n(n+1)^2$的和．

解　$1\times2^2+2\times3^2+3\times4^2+\cdots+n(n+1)^2$

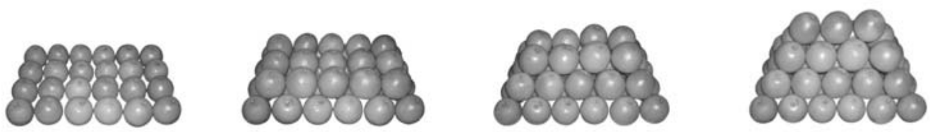
$$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)^2=\sum_{k=1}^{n}(k^3+2k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+2\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)\big(3n(n+1)+4(2n+1)+6\big)}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}\ .$$

8.　下圖表示將柳丁堆成長方形垛的疊法：



現將柳丁堆成長方形垛．已知最底層長邊有12個柳丁，短邊有6個，求此長方形垛共有幾個柳丁．

解　柳丁總數為

$$12\times6+11\times5+10\times4+9\times3+8\times2+7\times1=\sum_{k=1}^{6}(k+6)k=\sum_{k=1}^{6}k^2+\sum_{k=1}^{6}6k$$

$$=\frac{6(6+1)(12+1)}{6}+6\times\frac{6(6+1)}{2}$$

$$=91+126=217\text{（個）}.$$

9. 用數學歸納法證明：$2+5+8+\cdots+(3n-1)=\dfrac{n(3n+1)}{2}$．

解 (1)當 $n=1$ 時，$2=\dfrac{1\times(3+1)}{2}$，原式成立．

(2)設 $n=k$ 時原式成立，即 $2+5+8+\cdots+(3k-1)=\dfrac{k(3k+1)}{2}$，

則當 $n=k+1$ 時，

左式 $=2+5+8+\cdots+(3k-1)+(3k+2)=\dfrac{k(3k+1)}{2}+(3k+2)$

$=\dfrac{3k^2+7k+4}{2}=\dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}=\dfrac{(k+1)(3(k+1)+1)}{2}=$ 右式．

故由數學歸納法得知：對於所有的正整數 n

$$2+5+8+\cdots+(3n-1)=\frac{n(3n+1)}{2}$$

恆成立．

10. 用數學歸納法證明：

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}\ .$$

解 (1)當 $n=1$ 時，$\frac{1}{2\times5}=\frac{1}{10}=\frac{1}{6\times1+4}$，原式成立．

(2)設 $n=k$ 時原式成立，即

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{6k+4},$$

則當 $n=k+1$ 時，

$$左式=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k}{6k+4}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}=\frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}=\frac{k+1}{6(k+1)+4}=右式\ .$$

故由數學歸納法得知：對於所有的正整數 n

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$$

恆成立．