1-1　數列

1.　寫出下列各數列的前五項：

(1) $\langle 3-2n\rangle$.　　(2) $\left\langle \dfrac{3n}{2n+5}\right\rangle$.　　(3) $\left\langle (-2)^{n+1}\right\rangle$.　　(4) $\langle 1-n^2\rangle$.

解　(1) 1，-1，-3，-5，-7 .　　(2) $\dfrac{3}{7}$，$\dfrac{6}{9}$，$\dfrac{9}{11}$，$\dfrac{12}{13}$，$\dfrac{15}{15}$.

(3) 4，-8，16，-32，64 .　　(4) 0，-3，-8，-15，-24 .

2.　已知等差數列 $\langle a_n\rangle$ 中 $a_2=30$，$a_6=14$，求 a_{22} 及一般項 a_n .

解　因爲 $a_6=a_2+4d$，所以 $14=30+4d$，解得 $d=-4$，

又由 $a_2=a_1+d$，得 $a_1=a_2-d=30-(-4)=34$.

由一般項 $a_n=a_1+(n-1)d$，得 $a_n=34+(n-1)(-4)=38-4n$，

再將 $n=22$ 代入，得 $a_{22}=38-4\cdot 22=-50$.

3.　已知 1，a，b，15 四數中，前三數成等比數列，後三數成等差數列，求 a，b 的值 .

解　因爲 1，a，b 成等比數列，所以 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{a}$，即 $b=a^2$，

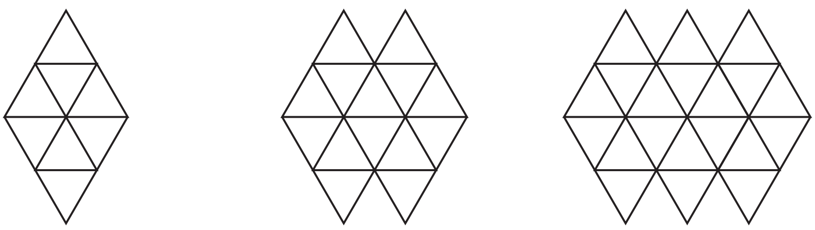
又因爲 a，b，15 成等差數列，所以 $b-a=15-b$，即 $2b=a+15$.

將 $b=a^2$ 代入 $2b=a+15$ 中，整理得 $2a^2-a-15=0$，

因式分解得 $(2a+5)(a-3)=0$，解得 $a=-\dfrac{5}{2}$ 或 3 .

故 $a=-\dfrac{5}{2}$，$b=\dfrac{25}{4}$ 或 $a=3$，$b=9$.

4.　用正三角形地磚依照如下的規律拼成若干圖形：

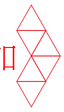


第1圖　　第2圖　　第3圖

設 a_n 是第 n 圖中正三角形地磚的總數 .

(1)寫出數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式 .

(2)求 a_{100} .

解 因爲觀察第1圖、第2圖與第3圖時，我們發現圖形每次均增加，也就是6個正三角形地磚，所以，這些圖形的地磚總數可看成一個首項爲8，公差爲6的等差數列，因此，

(1)數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式爲$\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + 6\ (n \geq 2) \end{cases}$.

(2)$a_{100} = 8 + (100-1) \times 6 = 602$.

5. 將手邊所有的正方形紙片，分別剪成邊長爲原正方形之$\dfrac{1}{2}$的小正方形，稱爲一個步驟．現在取一張邊長爲64公分的正方形，設經過n個步驟後，這張正方形紙片被剪成a_n個小正方形．

(1)寫出數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式．

(2)求a_6及此時小正方形的邊長．

解 最先有1個正方形，經過一個步驟後，剪成4個小正方形，因此$a_1 = 4$.
因爲每經過1個步驟，每個小正方形又被剪成4個更小的正方形，所以，$\langle a_n \rangle$是一個公比爲4的等比數列，因此，

(1)數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式爲$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = 4a_{n-1}\ (n \geq 2) \end{cases}$.

(2)$a_6 = 4 \cdot 4^{6-1} = 4096$.此時小正方形的邊長爲原先正方形邊長的$\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$，即爲$64 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = 1$（公分）.

6. 小明玩一款殲滅戰機的電玩遊戲，遊戲一開始會出現30架戰機，每一架戰機若沒有被殲滅，則每經過1分鐘後會變成2架．
已知小明每分鐘可以殲滅16架戰機，並設n分鐘底戰機的數量爲a_n，因此可得$a_1 = 14$.

(1)寫出數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式．

(2)求a_4 .

解 (1)因爲每經過1分鐘，未被殲滅的戰機數量會變成2倍，而小明每分鐘可以殲滅16架戰機，所以$a_n = 2a_{n-1} - 16$，又因爲$a_1 = 14$，所以數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式爲$\begin{cases} a_1 = 14 \\ a_n = 2a_{n-1} - 16\ (n \geq 2) \end{cases}$.

(2)由遞迴關係式可得：$a_2 = 12$，$a_3 = 8$，$a_4 = 0$.

7. 將所有的正整數依序排列如右圖所示．

第一列爲1，第二列爲2，3，4，第三列爲5，6，7，8，9，以此類推．

設 a_n 爲第 n 列中最左邊的數字．

1
2 3 4
5 6 7 8 9
…

(1)寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．　(2)求 a_6．

解 (1)因爲觀察數字圖發現：每一列中數字的個數依序爲1個，3個，5個，…，所以可得第 n 列中最左邊的數字依序爲

$a_1 = 1$，

$a_2 = 2 = 1+1 = a_1 + 1$，

$a_3 = 5 = 2+3 = a_2 + 3$，

$\vdots$

故數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式爲 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (2n-3)\ (n \geq 2) \end{cases}$．

(2)由遞迴關係式得

$a_4 = a_3 + 5 = 5 + 5 = 10$，$a_5 = a_4 + 7 = 10 + 7 = 17$，$a_6 = a_5 + 9 = 17 + 9 = 26$．

8. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式爲 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (2n-1)\ (n \geq 2) \end{cases}$．

(1)寫出 a_2，a_3．　(2)猜測一般項 a_n．

(3)使用數學歸納法證明：你的猜測是正確的．

解 (1)由遞迴關係式可得 $a_2 = 1+3 = 4 = 2^2$，$a_3 = 4+5 = 9 = 3^2$．

(2)由(1)猜測 $a_n = n^2$．

(3)①當 $n=1$ 時，$a_1 = 1 = 1^2$，猜測是正確的．

②設 $n=k$ 時猜測正確，即 $a_k = k^2$，則

當 $n = k+1$ 時，

$$a_{k+1} = a_k + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,$$

可知猜測是正確的．

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，即對於所有的正整數 n，

$$a_n = n^2$$

恆成立．

9. 使用數學歸納法證明：對所有的正整數 n， n^3+2n 恆為3的倍數．

解 設 $a_n=n^3+2n$ ．

(1)當 $n=1$ 時， $a_1=1^3+2\times1=3$，是3的倍數．

(2)設 $n=k$ 時命題成立，即 $a_k=k^3+2k$ 是3的倍數，則

當 $n=k+1$ 時，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= (k+1)^3+2(k+1)\\
&= k^3+3k^2+3k+1+2k+2\\
&= k^3+2k+3(k^2+k+1)\\
&= a_k+3(k^2+k+1) .
\end{aligned}
$$

因為 a_k 是3的倍數，所以 a_{k+1} 也是3的倍數．

故由數學歸納法可知，對於所有正整數 n， n^3+2n 恆為3的倍數．

10. 某公司民國95年營業額為100億元，民國96年營業額為125億元，該年的成長率為25%．97、98、99三年的成長率皆相同，且民國99年的營業額為216億元，那麼該公司99年的成長率為多少百分比？

解 設97、98、99三年的成長率均為 $r=k\%$ ．

由題意可知：

99年的營業額為 $216=125\cdot(1+r)^3$，解得 $r=\frac{1}{5}=20\%$ ．

故該公司99年的成長率為20% ．