99年～103年指考數甲考過哪些重點？

★與「圓方程式」相關的有２題，搭配直線出題！

【103數甲】

在坐標平面上，圓 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$ 與 $y=|2x+1|$ 的圖形有幾個交點？(單選)

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 0 個

Ans：(D)

【102數甲】

設 m 為實數。若圓 $x^2+y^2+4x-7y+10=0$，與直線 $y=m(x+3)$ 在坐標平面上的兩個交點位於不同的象限，而滿足此條件的 m 之最大範圍為 $a<m<b$，則 $a=$【　　　　】、$b=$【　　　　】。

Ans：$\frac{2}{3}$；$\frac{5}{3}$

★與「向量(含平面向量與空間向量及空間中的平面與直線)」相關的有１３題

，搭配三角函數、聯立方程式與不等式出題！

【103數甲】

給定向量 $\overrightarrow{u}$ ＝（2 , 2 , 1），請選出正確的選項：(多選)

(A)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\sqrt{2}$

(B)可找到向量 $\overrightarrow{v}$ 使得 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=(1,3,4)$

(C)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|=2|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

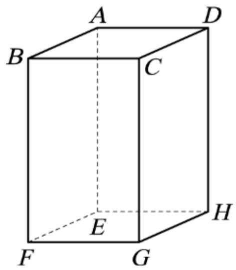
(D)若非零向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|=3|\overrightarrow{v}|$，則 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$

(E)若向量 $\overrightarrow{v}$ 滿足 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$，則 $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$

Ans：(A)(D)(E)

【103數甲】

如右圖，設 $ABCD-EFGH$ 為空間中長、寬、高分別為 2、3、5 的長方體。已知 $\overline{AB}=2$、$\overline{AD}=\overline{BC}=3$，且 $\overline{DH}=5$，則內積 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$ 之值為【　　　　】。



Ans：9

【102數甲】

設 c 為實數，E_1、E_2、E_3 皆為坐標空間中的平面，其方程式如下：

$E_1：cx+y=c$ ， $E_2：cy+z=0$ ， $E_3：x+cz=1$

已知 E_1、E_2、E_3 有一個交點的 z 坐標為 1，請選出正確的選項。(多選)

(A)（1 , 0 , 0）是 E_1、E_2、E_3 的一個交點

(B) E_1、E_2、E_3 有無窮多個交點

(C) E_1、E_2、E_3 中一定有兩個平面重合

(D) $c=1$

(E) E_1、E_2、E_3 有一個交點的 z 坐標為 2。

Ans：(A)(B)(E)

【102數甲】

考慮向量 $\overrightarrow{u}$ ＝（a , b , 0）、 $\overrightarrow{v}$ ＝（c , d , 1），其中 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$。

請選出正確的選項。

(A)向量 $\overrightarrow{v}$ 與 z 軸正向的夾角恆為定值（與 c、d 之值無關）

(B) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(C) $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 夾角的最大值為 135°

(D) $ad-bc$ 的值可能為 $\dfrac{5}{4}$

(E) $|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}|$ 的最大值為 $\sqrt{2}$ 。

Ans：(A)(C)(E)

【102數甲】

設 A、B、C、D 為空間中四個相異點，且直線 CD 垂直平面 ABC。已知

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，$\sin\angle ABC=\dfrac{4}{5}$，且 $\angle ABC$ 為銳角，則 $\overline{AD}=$【　　　】。

Ans： $6\sqrt{5}$

【101數甲】

平面上有一 $\triangle ABC$，G 為 $\triangle ABC$ 的重心。O、D 為此平面上的相異二點，且滿足

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ 。請選出正確的選項。(多選)

(A) O、G、D 三點共線

(B) $\overline{OD}=2\overline{OG}$

(C) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{OD}$

(D) G 位於 $\triangle ABC$ 的內部

(E) D 位於 $\triangle ABC$ 的外部。

Ans：(A)(C)(D)

【101數甲】

如右圖所示，正立方體的邊長為 2，其中點 E 為原點，點 F、點 H、點 A 的坐標分別為（2 , 0 , 0）、（0 , 2 , 0）、（0 , 0 , 2）。令 Ω 表示四面體 $CBGD$ 與四面體 $BAFC$ 相交所形成的四面體。請選出正確的選項。

(A)Ω 有一頂點坐標為（1 , 1 , 2）

(B)Ω 有一稜線其方向向量為（1 , 0 ,－1）

(C)Ω 有兩個側面互相垂直

(D)Ω 僅有一個側面是正三角形

(E)Ω 的體積為 $\frac{2}{3}$。（註：四面體的體積為 $\frac{1}{3}$×底面積×高）

Ans：(A)(B)(C)

【101數甲】

設 a , b , c , d , e 為實數。已知一次方程組 $\begin{cases} ax+3y+5z=b \\ \quad\;\; y+cz=0 \\ \quad 2y+dz=e \end{cases}$ 的解的圖形是坐標空間中包含 x 軸的一個平面，則 a=【　　】，b=【　　】，c=【　　】。（化成最簡分數）

Ans：0；0；$\frac{5}{3}$

【101數甲】

空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$、$ABEF$，其邊長皆為 4。已知內積 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF}=11$，則 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=$【　　　】。

Ans：27

【100數甲】

將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 $\overrightarrow{x}$ 、 $\overrightarrow{y}$ 分別為原點 O 到兩個頂點的向量。若將原點 O 到正六角星 12 個頂點的向量，都寫成為 $a\overrightarrow{x}+b\overrightarrow{y}$ 的形式，則 $a+b$ 的最大值為何？(單選)

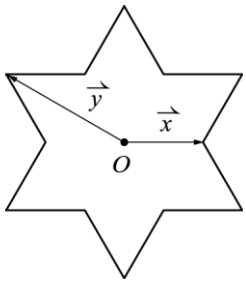
(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6



Ans：(D)

【100數甲】

在坐標空間中，有一邊長為 2、中心在原點 O 的正立方體，且各稜邊都與三坐標平面平行或垂直，如圖所示。

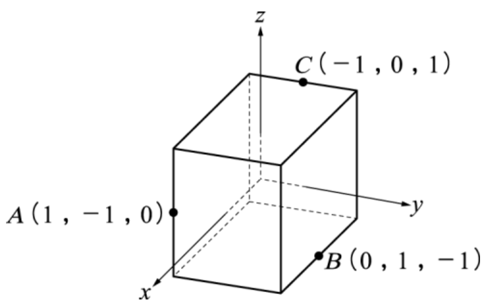
已知 $A(1,-1,0)$、$B(0,1,-1)$、$C(-1,0,1)$ 這三點都是某平面 E 和正立方體稜邊的交點。試問下列哪些點也是平面 E 和正立方體稜邊的交點？(多選)

(A) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1)$

(B) $(-1,1,0)$

(C) $(0,-1,-1)$

(D) $(-2,1,1)$



Ans：(B)

【100數甲】

坐標空間中，若平面 E：$ax+by+cz=1$ 滿足以下三條件：

⑴平面 E 與平面 F：$x+y+z=1$ 有一夾角為 $30°$，

⑵點 A（1 , 1 , 1）到平面 E 的距離等於 3，

⑶ $a+b+c>0$。

則 $a+b+c$ 的值為【　　　　】。（化成最簡分數）

Ans：$\frac{1}{3}$

【99數甲】

向量（2 , −1）與下列哪一個向量之夾角（介於 0°與 180°之間）為最小？(單選)

(A)（$-1 , -\sqrt{2}$）　(B)（$-\sqrt{2} , 1$）　(C)（$-1 , \sqrt{2}$）　(D)（$1 , \sqrt{2}$）　(E)（$\sqrt{2} , 1$）

Ans：(E)

★與「指數與對數」相關的有７題，搭配機率、不等式出題！

【103數甲】

請問指數方程式 $2^{10^x}=10^6$ 的解 x 最接近下列哪一個選項？(單選)

（$\log2\approx0.3010$、$\log3\approx0.4771$、$\log7\approx0.8451$）

(A) 1.1　(B) 1.2　(C) 1.3　(D) 1.4　(E) 1.5

Ans：(C)

【102數甲】

坐標平面上，直線 $x=2$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_2x$ 的圖形於 P、Q 兩點；直線 $x=10$ 分別交函數 $y=\log_{10}x$、$y=\log_2x$ 的圖形於 R、S 兩點。試問四邊形 $PQSR$ 的面積最接近下列哪一個選項？（$\log_{10}2\approx0.3010$） (單選)

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13　(E) 14。

Ans：(C)

【101數甲】

作某項科學實驗共有三種可能結果 A、B、C，其發生的機率分別為 $p_A=\log a$、$p_B=\log_4a$、$p_C=\log_8a$；其中 a 為一正實數。試問 p_A 為下列哪一個選項？(單選)

(A) $\frac{5}{9}$　(B) $\frac{6}{11}$　(C) $\frac{7}{13}$　(D) $\frac{8}{15}$　(E) $\frac{9}{17}$。

Ans：(B)

【101數甲】

當（x,y）在直線 $2x+y=3$ 上變動時，關於 $K=9^x+3^y$ 的敘述，試問下列哪個選項是正確的？

(A) K 有最大值 28、最小值 $6\sqrt{3}$

(B) K 有最大值 28、但沒有最小值

(C) K 沒有最大值、但有最小值 12

(D) K 沒有最大值、但有最小值 $6\sqrt{3}$

(E) K 沒有最大值也沒有最小值。

Ans：(D)

【100數甲】

考慮坐標平面上滿足 $2^x=5^y$ 的點 P（x,y），試問下列哪一個選項是錯誤的？(單選)

(A)（0 , 0）是一個可能的 P 點

(B)（log5 , log2）是一個可能的 P 點

(C)點 P（x,y）滿足 $xy\geqq 0$

(D)所有可能的點 P（x,y）構成的圖形為一直線

(E)點 P 的 x、y 坐標可以同時為正整數

Ans：(E)

【100數甲】

試求所有滿足 $\log(x^3-12x^2+41x-20)\geqq 1$ 的 x 值之範圍。

Ans：$1\leqq x\leqq 5$ 或 $x\geqq 6$

【99數甲】

設 a 為一正實數且滿足 $a^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$。試問下列哪些選項是正確的？(多選)

(A) $a^3=3$　(B) $\log_{\sqrt{3}} a=\sqrt{3}$　(C) $a>1$　(D) $a<3^{\frac{1}{4}}$

Ans：(C)

★與「三角函數(含複數)」相關的有１０題，搭配數列與級數、方程式、不等式出題！

【103數甲】

在地面某定點測得數公里外高塔塔尖的仰角為θ_1，朝高塔方向沿直線前進 100 公尺之後，重新測得塔尖仰角為θ_2，再沿同一直線繼續前進 100 公尺後，測得仰角為θ_3。請問下列哪一個選項的數值依序成等差數列？(單選)

(A)θ_1，θ_2，θ_3

(B) $\sin\theta_1$，$\sin\theta_2$，$\sin\theta_3$

(C) $\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$

(D) $\tan\theta_1$，$\tan\theta_2$，$\tan\theta_3$

(E) $\cot\theta_1$，$\cot\theta_2$，$\cot\theta_3$

Ans：(E)

【103數甲】

在（凸）四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=4$，$\overline{CD}=3$，$\overline{DA}=x$，且對角線 $\overline{AC}=4$。請選出正確的選項：(多選)

(A) $\cos\angle ABC \geqq \frac{3}{7}$

(B) $\cos\angle BAD > \cos\angle ABC$

(C) x 可能為 1

(D) $x < \frac{13}{2}$

(E)若 A、B、C、D 四點共圓，則 $x=\frac{7}{4}$

Ans：(D)(E)

【102數甲】

設 z 為一複數，且 $\frac{z-2}{z+2}=i$（其中 $i=\sqrt{-1}$ 為虛數單位）。試問 z 的絕對值 $|z|$ 為下列哪一個選項？(單選)

(A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$　(E) 2。

Ans：(E)

【102數甲】

考慮函數 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ ，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。(多選)

(A) $f(-x)=f(x)$ 對所有實數 x 均成立

(B) $f(x)$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(C) $f(x)$ 的最小值為 0

(D) $f\left(\frac{\pi}{10}\right)>f\left(\frac{\pi}{9}\right)$

(E)函數 $f(x)$ 的（最小正）週期為π。

Ans：(A)(B)

【102數甲】

設 A、B、C、D 為空間中四個相異點，且直線 CD 垂直平面 ABC。已知

$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=10$，$\sin\angle ABC=\frac{4}{5}$，且 $\angle ABC$ 為銳角，則 $\overline{AD}=$【　　　】。

Ans：$6\sqrt{5}$

【101數甲】

設 $0\leqq\theta<2\pi$，且方程式 $x^2-a=0$ 之兩根恰為 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$。請選出正確的選項。(多選)

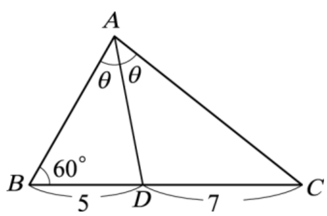
(A) $\tan\theta=1$　　(B) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$　　(C) $\sin2\theta=-1$　　(D) $a=\frac{1}{2}$

(E)滿足題設的 θ 只有一個。

Ans：(B)(C)(D)

【101數甲】

在 $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 邊上一點且 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$。已知 $\overline{BD}=5$、$\overline{DC}=7$，且 $\angle ABC=60°$。



(1) 試求 $\sin\angle ACB$ 之值。

(2) 試求 $\sin\angle BAC$ 之值。

(3) 試求 $\overline{AB}$ 邊之長。

Ans：(1) $\frac{5\sqrt{3}}{14}$　(2) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$　(3) $\frac{15}{2}$

【100數甲】

試證：當 $\frac{3\pi}{2} \leqq \theta \leqq 2\pi$ 時，$3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$ 。

Ans：略

【99數甲】

將函數 $y=3\sin x-\cos x$，$y=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$y=2\sin x+2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如右圖：

試問圖中的圖形 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ 所代表的函數應為下列哪一個選項？(單選)

(A) $f(x)=3\sin x-\cos x$，$g(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$h(x)=2\sin x+2\cos x$

(B) $f(x)=3\sin x-\cos x$，$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$g(x)=2\sin x+2\cos x$

(C) $g(x)=3\sin x-\cos x$，$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$h(x)=2\sin x+2\cos x$

(D) $g(x)=3\sin x-\cos x$，$h(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$f(x)=2\sin x+2\cos x$

(E) $h(x)=3\sin x-\cos x$，$f(x)=\sin(2x)+3\cos(2x)$，$g(x)=2\sin x+2\cos x$

Ans：(C)

【99數甲】

在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\cos\angle ABC=-\frac{3}{5}$，且其外接圓半徑為 $\frac{13}{2}$，則 $\sin\angle BAC=$【　　　　】。(化成最簡分數)。

Ans：$\frac{33}{65}$

★與「排列與組合和機率與統計」相關的有１０題，搭配指數與對數、矩陣出題！

【103數甲】

職業棒球季後賽第一輪採五戰三勝制，當參賽甲、乙兩隊中有一隊贏得三場比賽時，就由該隊晉級而賽事結束。每場比賽皆須分出勝負，且每場比賽的勝負皆不受之前已賽結果影響。假設甲隊在任一場贏球的機率為定值 p，以 $f(p)$ 表實際比賽場數的期望值（其中 $0\leqq p\leqq 1$），請選出正確的選項：(多選)

(A)只須比賽 3 場就產生晉級球隊的機率為 $p^3+(1-p)^3$

(B) $f(p)$ 是 p 的 5 次多項式

(C) $f(p)$ 的常數項等於 3

(D)函數 $f(p)$ 在 $p=\frac{1}{2}$ 時有最大值

(E) $f\left(\frac{1}{4}\right)<f\left(\frac{4}{5}\right)$

Ans：(A)(C)(D)

【103數甲】

在遊戲中，阿玲拿到如下的數字卡。主持人隨機從 1 至 9 號球中同時取出三球，若這三球的號碼中任兩個都不在卡片上的同一行也不在卡片上的同一列時就得獎，則阿玲得獎的機率為【　　　　】。

Ans：$\frac{1}{14}$

1	2	3
8	9	4
7	6	5

【102數甲】

袋中有大小相同編號 1 到 8 號的球各一顆。小明自袋中隨機一次取出兩球，設隨機變數 X 的值為取出兩球中的較小號碼。若 p_k 表 X 取值為 k 的機率（$k=1$，2，……，8），試問有幾個 p_k 的值大於 $\frac{1}{5}$？(單選)

(A) 1 個　(B) 2 個　(C) 3 個　(D) 4 個　(E) 5 個。

Ans：(B)

【102數甲】

考慮所有由 1、2、3、4、5、6 各一個與三個 0 所排成形如$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$對角線均為 0 的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$為奇數的機率為下列哪一個選項？(單選)

(A)$\frac{1}{20}$　(B)$\frac{1}{10}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{9}{10}$　(E)$\frac{19}{20}$ 。

Ans：(B)

【101數甲】

某公司員工中有 15%為行政人員，35%為技術人員，50%為研發人員。這些員工中，60%的行政人員有大學文憑，40%的技術人員有大學文憑，80%的研發人員有大學文憑。從有大學文憑的員工中隨機抽選一人，他（或她）是技術人員的機率是下列哪一個選項？(單選)

(A)$\frac{2}{9}$　(B)$\frac{1}{3}$　(C)$\frac{4}{9}$　(D)$\frac{1}{5}$　(E)$\frac{2}{5}$ 。

Ans：(A)

【101數甲】

作某項科學實驗共有三種可能結果 A、B、C，其發生的機率分別為 $p_A=\log a$、$p_B=\log_4 a$、$p_C=\log_8 a$；其中 a 為一正實數。試問 p_A 為下列哪一個選項？(單選)

(A)$\frac{5}{9}$　(B)$\frac{6}{11}$　(C)$\frac{7}{13}$　(D)$\frac{8}{15}$　(E)$\frac{9}{17}$ 。

Ans：(B)

【100數甲】

將 1、2、3、4 四個數字隨機填入右下方 2×2 的方格中，每個方格中恰填一數字，但數字可重複使用。試用事件「A 方格的數字大於 B 方格的數字、且 C 方格的數字大於 D 方格的數字」的機率為多少？(單選)

A	B
C	D

(A) $\frac{1}{16}$　(B) $\frac{9}{64}$　(C) $\frac{25}{64}$　(D) $\frac{9}{256}$　(E) $\frac{25}{256}$

Ans：(B)

【100數甲】

某手機公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的手機中分別有 5%，3%，3%是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過 $\frac{5}{12}$，則甲生產線所製造的手機數量可占全部手機產量的百分比至多為【　　　　】%。

Ans：30

【99數甲】

不透明箱中置有編號分別為 1、2、3、6、8 的球各一顆。同時自箱中隨機取出三顆球，則此三球編號之和大於 14 的機率為下列哪一個選項？(單選)

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{3}{10}$　(C) $\frac{2}{5}$　(D) $\frac{1}{2}$　(E) $\frac{3}{5}$

Ans：(B)

【99數甲】

一個抽獎活動依排隊順序抽獎，輪到抽獎的人有一次抽獎機會，抽獎方式為丟擲一枚公正銅板，正面為中獎，反面為沒中獎。獎品有三份，活動直到三份獎品都被抽中為止。則在排第四位的人可以抽獎的情況下，排第五位的人可以抽獎的條件機率為【　　　　】。(化成最簡分數)。

Ans：$\frac{11}{14}$

★與「方程組與矩陣」相關的有９題，搭配機率、複數、微積分出題！

【103數甲】

考慮 x、y、z 的方程組 $\begin{cases} 2^x-3^y+5^z=-1 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=4 \\ 2^{x+1}+3^{y+1}+a5^z=8 \end{cases}$，其中 a 為實數，請選出正確的選項：(多選)

(A)若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $x=0$

(B)若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y>0$

(C)若 (x, y, z) 為此方程組的解，則 $y<z$

(D)當 $a\neq-3$ 時，恰有一組 (x, y, z) 滿足此方程組

(E)當 $a=-3$ 時，滿足此方程組的所有解 (x, y, z) 會在一條直線上

Ans：(A)(B)

【103數甲】

對於正整數解 n，設 $(1+i)^n=a_n+ib_n$，其中 $i=\sqrt{-1}$ 且 a_n、b_n 為實數。

(1)試求 $a_4^2+b_4^2$ 之值。

(2)從恆等式 $(1+i)^{n+1}=(1+i)^n(1+i)$ 可推得 a_n、b_n 會滿足矩陣乘法

$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，試求矩陣 T。

(3)令 P、Q 為坐標平面上異於原點 O 的兩點，若矩陣 T 在平面上定義的線性變換將 P、Q 分別映射到點 P'、Q'，試證 $\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}=\dfrac{\overline{OQ'}}{\overline{OQ}}$ 且 $\angle POQ=\angle P'OQ'$。

Ans：(1) 16　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　(3) 略

【102數甲】

考慮所有由 1、2、3、4、5、6 各一個與三個 0 所排成形如$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$對角線均為 0 的三階方陣。今隨機選取這樣一個方陣，試問其行列式值$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{vmatrix}$為奇數的機率為下列哪一個選項？(單選)

(A)$\frac{1}{20}$ (B)$\frac{1}{10}$ (C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{9}{10}$ (E)$\frac{19}{20}$ 。

Ans：(B)

【102數甲】

設 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 為坐標平面上兩點，C 為直線 AB 外一點。經平面線性變換 M 作用後，A 被映射至 $A'(1,\sqrt{2})$、B 被映射至 $B'(-1,\sqrt{2})$，而 C 被映射至 C'。

(1) 試問變換 M 的矩陣為何？

(2) 試證明變換 M 將ΔABC 的重心映射至$\Delta A'B'C'$ 的重心。

(3) 若ΔABC 的面積為 3，試求點 C' 與直線 $A'B'$ 的距離。

Ans：(1) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ (2) 略 (3) $6\sqrt{2}$

【101數甲】

已知方陣$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$的反方陣為$\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix}$。試問下列哪一個選項為

$\begin{bmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$的反方陣？(單選)

(A)$\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix} a' & d' & g' \\ b' & e' & h' \\ c' & f' & i' \end{bmatrix}$ (C)$\begin{bmatrix} g' & h' & i' \\ a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}$

(D)$\begin{bmatrix} g' & a' & d' \\ h' & b' & e' \\ i' & c' & f' \end{bmatrix}$ (E)$\begin{bmatrix} c' & a' & b' \\ f' & d' & e' \\ i' & g' & h' \end{bmatrix}$。

Ans：(E)

【101數甲】

設 a、b、c、d、e 為實數。已知一次方程組$\begin{cases} ax+3y+5z=b \\ \quad y+cz=0 \\ 2y+dz=e \end{cases}$的解的圖形是坐標

空間中包含 x 軸的一個平面，則 $a=$【　　　】，$b=$【　　　】，$c=$【　　　】。

（化成最簡分數）

Ans：0；0；$\frac{5}{3}$

【100數甲】

設 $A=\begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ c & d \end{bmatrix}$。已知 $AB=\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$且 A 的行列式之值為 2

，試問下列哪些選項是正確的？(多選)

(A) $9a-4b=-2$ (B) $ac=-24$ (C) $d=-15$ (D)$\begin{bmatrix} b & -a \\ -9 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ans：(A)(C)

【99數甲】

考慮矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$，其中 a、b、c 為實數且行列式 $\det A=1$。試問行列式 $\det(A-A^{-1})$ 之值為下列哪一個選項？(單選)

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 4　(E) 16

Ans：(D)

【99數甲】

當 n 為正整數時，令 $x=a_n$，$y=b_n$，$z=c_n$ 為三元一次聯立方程組

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$ 之唯一解，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$【　　　　】。

Ans：-2

★與「微積分」相關的有１７題，搭配多項式、聯立方程組出題！

【103數甲】

令多項式 $2(x+1)^n$ 除以 $(3x-2)^n$ 所得餘式的常數項為 r_n 。請問極限 $\lim_{n\to\infty} r_n$ 為下列哪一選項？(單選)

(A) 0　(B) $\frac{3}{2}$　(C) 2　(D) 3　(E)不存在

Ans：(C)

Ans：(C)

【103數甲】

考慮多項式函數 $f(x)=4x^3-11x^2+6x$。請選出正確的選項：(多選)

(A)函數 f 的圖形在點（1，－1）的切線斜率為正

(B)函數 f 的圖形與直線 $y=1$ 交於三點

(C)函數 f 的唯一相對極小值為 $\frac{-9}{4}$

(D) $f(\pi)>0$

(E) $f\left(\cos\frac{4\pi}{7}\right)>0$

Ans：(C)(D)

【103數甲】

在坐標平面上以Ω表曲線 $y=x-x^2$ 與直線 $y=0$ 所圍的有界區域。

(1)試求Ω的面積。

(2)若直線 $y=cx$ 將Ω分成面積相等的兩塊區域，試求 c 之值。

Ans：(1) $\frac{1}{6}$　(2) $1-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

【102數甲】

令 $f(x)=x^3-x^2-2x+1$。設 a、b、c 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根，且 $a<b<c$，請選出正確的選項。(多選)

(A)極限 $\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$ 存在

(B) a、b、c 至少有一個在 0 與 1 之間

(C) a，a^2，a^3，……，a^n，……為收斂數列

(D) b，b^2，b^3，……，b^n，……為收斂數列

(E) c，c^2，c^3，……，c^n，……為收斂數列。

Ans：(B)(D)

【102數甲】

設 $p(x)$ 為一實係數多項式，其各項係數均大於或等於 0。在坐標平面上，已知對所有的 $t\geqq 1$，函數 $y=p(x)$、$y=-1-x^2$ 的圖形與直線 $x=1$、$x=t$ 所圍成有界區域的面積為 $t^4+t^3+t^2+t+C$（其中 C 為常數）。

(1) 試說明 $p(x)>-1-x^2$ 對所有的 $x\geqq 1$ 均成立。

(2) 設 $t\geqq 1$，試求 $\int_1^t(-1-x^2)\,dx$。

(3) 試求 C。

(4) 試求 $p(x)$。

Ans：(1) 略 (2) $-\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$ (3) -4 (4) $4x^3+2x^2+2x$

【101數甲】

令 $f(x)=x(x-1)(x^3-2)$，試問有多少個實數 a 滿足 $\int_0^a f'(x)\,dx=0$？(單選)

(A) 1 個 (B) 2 個 (C) 3 個 (D) 4 個 (E) 5 個。

Ans：(C)

【101數甲】

已知一個 n 次實係數多項式 $f(x)$ 滿足下列性質：

當 $x<0$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；

當 $0<x<1$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)<0$；

當 $1<x<4$ 時，$f'(x)<0$ 且 $f''(x)>0$；

當 $x>4$ 時，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)>0$。

請選出正確的選項。(多選)

(A) $f'(2)>f'(3)$

(B) $f(x)$ 在 $x=4$ 時有最小值

(C) $f(x)$ 的圖形只有一個反曲點

(D) n 可能為 3

(E) $f(x)$ 的最高次項係數必為正。

Ans：(B)(D)

【101數甲】

設 $f(x)$ 為一實係數多項式函數。

(1) 設 $\langle a_n \rangle$ 為一數列，其中 $a_n=\dfrac{f(n)}{n^4}$。若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$，試求 $f(x)$ 的次數與最高次項係數。

(2) 若 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，試求 $f(x)$ 的函數圖形在 $x=0$ 時的切線方程式。

(3) 若 $f(x)$ 滿足上面(1)與(2)的假設，且 $f''(0)=2$，試求 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ 之值。

Ans：(1) 4 ; 5　(2) $y=3x$　(3) $\dfrac{8}{3}$

【100數甲】

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式函數。已知五個方程式的相異實根個數如下表所述：

方程式	相異實根的個數
$f(x)-20=0$	1
$f(x)-10=0$	3
$f(x)=0$	3
$f(x)+10=0$	1
$f(x)+20=0$	1

關於 $f(x)$ 的極小值α，試問下列哪一個選項是正確的？(單選)

(A) α不存在

(B) $-20<\alpha<-10$

(C) $-10<\alpha<0$

(D) $0<\alpha<10$

(E) $10<\alpha<20$。

註：極小值是指相對極小值，或稱為局部極小值。

Ans：(C)

【100數甲】

假設兩地之間的通話費，第一個半分鐘是 5 元，之後每半分鐘是 2 元，不滿半分鐘以半分鐘計算，則 t 分鐘的通話費 $C(t)$ 公式如下（單位元）:

$C(t)=5-2[1-2t]$，其中$[x]$表示小於或等於 x 的最大整數，

例如：$[3.5]=3$，$[-3.1]=-4$，$[-5]=-5$ 等。試問下列哪些選項是正確的？(多選)

(A) 10 分鐘的通話費是 43 元

(B)在 $t\geqq 0$ 時，$[1-2t]=-[2t-1]$恆成立

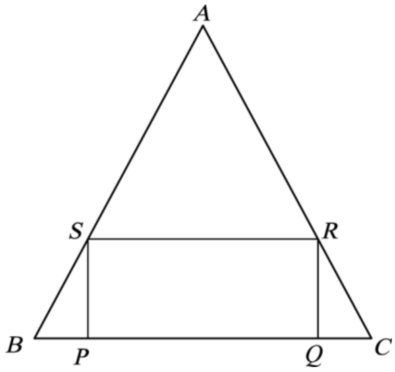
(C) $\lim_{t\to 10.5} C(t)=45$

(D) $\lim_{t\to 11.2} C(t)=49$

Ans：(A)(D)

【100數甲】

如圖所示，$PQRS$ 為一給定的矩形，長 $\overline{PQ}=12$、寬 $\overline{QR}=5$，而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$P$、$Q$ 在 $\overline{BC}$ 邊上，R、S 分別在 $\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 邊上，則當 $\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊上的高為【　　　　】時，$\triangle ABC$ 的面積最小。



Ans：10

【100數甲】

坐標平面上，已知函數 $f(x)=4x^3+x-2$ 的圖形以 $A(1,3)$ 為切點的切線為 L，則以切線 L 及曲線 $y=f(x)$ 為界所圍成區域的面積為【　　　　】。

Ans：27

【100數甲】

已知實係數三次多項式函數 $y=f(x)$ 的最高次項係數為 12，其圖形與水平線 $y=25$ 交於相異的三點 $(0,25)$、$(1,25)$ 及 $(2,25)$。

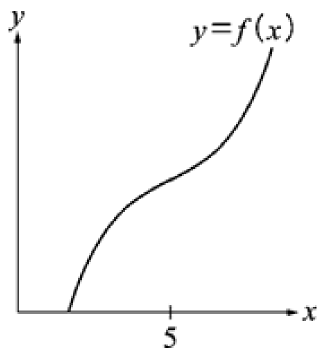
⑴試求曲線 $y=f(x)$ 圖形上的反曲點坐標。

⑵試求定積分 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 之值。

Ans：(1) $(1,25)$　(2) 50

【99數甲】

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式，右圖所示為函數 $y=f(x)$ 的圖形，其中 $(5, f(5))$ 為反曲點。試問 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 可能為下列哪一個選項？(單選)



(A) $(x-5)^2-1$

(B) $(x-5)^2+1$

(C) $(x-5)^2$

(D) $-(x-5)^2+1$

(E) $-(x-5)^2-1$

Ans：(B)

【99數甲】

設 a、b、c 分別為函數 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$，$g(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$，$h(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{2}{x^2}}$。

在 x 為任意正實數時的最小值。試問下列哪些選項是正確的？(多選)

(A) $b=a^2$

(B) $c=2^{\frac{3}{4}}$

(C) $f(x)+g(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $a+b$

(D) $g(x)+h(x)$ 在 x 為任意正實數時的最小值為 $b+c$

Ans：(B)(D)

【99數甲】

當 n 為正整數時，令 $x=a_n$，$y=b_n$，$z=c_n$ 為三元一次聯立方程組

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ -2nx+ny+3z=8n \end{cases}$$ 之唯一解，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$【　　　】。

Ans：-2

【99數甲】

已知多項式 $f(x)$ 滿足 $f''(x)=8x+11$，且 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極值，則

$f'(0)=$【　　　　】。

Ans：-15

【99數甲】

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式。已知原點$(0,0)$為函數

$y=f(x)$ 的圖形之反曲點，且此圖形在原點的切線為 $y=-x$。

⑴ 試求 b、c、d。

⑵ 若 $a>0$ 且 $y=f(x)$ 的圖形與直線 $y=0$ 所圍的有界區域面積為 2，試求 a。

Ans：(1) $b=0$，$c=-1$，$d=0$ (2) $\frac{1}{4}$