

1-4 組合

1. 由 8 個相異的玩具，任選幾個（至少選一個）之組合總數為_____。

解答 255

解析 $C_1^8 + C_2^8 + C_3^8 + C_4^8 + C_5^8 + C_6^8 + C_7^8 + C_8^8 = 2^8 - 1 = 255$

2. 甲家有 4 男 2 女，乙家有 3 男 3 女，則每家選出 4 人而成 5 男 3 女的方法有_____種。

解答 93

解析

甲	乙	方法數
4 男	1 男 3 女	$C_4^4 \times C_1^3 \times C_3^3 = 3$
3 男 1 女	2 男 2 女	$C_3^4 \times C_1^2 \times C_2^3 \times C_2^3 = 72$
2 男 2 女	3 男 1 女	$C_2^4 \times C_2^2 \times C_3^3 \times C_1^3 = 18$

$\therefore 3 + 72 + 18 = 93$ (種)

3. 平面上有 5 條斜率都不同的直線，其中沒有任何 3 條以上直線相交 1 點的情況，則可作出_____個三角形。

解答 10

4. 若 $C_8^n = C_9^n$ ，則 C_n^{20} 之值為_____。

解答 1140

5. 假設在 10 件產品中，有 4 件是不良產品，由產品中隨機抽取 5 件，其中至少有 1 件不良品的取法有(1)_____種，其中至少有 3 件不良品的取法有(2)_____種。

解答 (1)246;(2)66

6. 若 $P_r^n = 90$ 且 $C_r^n = 45$ ，則 $n =$ _____。

解答 10

解析 $\because P_r^n = C_r^n \times r! \Rightarrow 90 = 45 \times r! \Rightarrow r = 2$

則 $P_r^n = P_2^n = 90 \Rightarrow n \times (n - 1) = 90 \Rightarrow n^2 - n - 90 = 0$

$\Rightarrow (n - 10)(n + 9) = 0$

但 $n \geq 2 \therefore n = 10$

7. 一測驗題庫有 20 題相異題目，從中取出 18 題組成一試卷，若不論題序，總共可組成_____種試卷。

解答 190

解析 取出題目不論題序為組合問題

故自 20 題相異題目任選 18 題，總共可組成 $C_{18}^{20} = C_2^{20} = \frac{20 \times 19}{2 \times 1} = 190$ 種

8. 設 m 為正整數，且 $C_{2m}^{20} = C_{m+2}^{20}$ ，則 C_5^m 為_____。

解答 6

解析 $\because C_{2m}^{20} = C_{m+2}^{20} \Rightarrow 2m = m + 2$ 或 $2m + (m + 2) = 20$

$\Rightarrow m = 2$ 或 $3m = 18 \Rightarrow m = 2$ 或 $m = 6$

\therefore 所求 $= C_5^m$ ($m \geq 5$) $\therefore m = 6$

故 $C_5^m = C_5^6 = C_1^6 = 6$

9.自 6 位男生 5 位女生中，選出 4 人組成一委員會，恰有 2 男 2 女的選法有_____種。

解答 150

解析 恰為 2 男 2 女的選法為 $C_2^6 \times C_2^5 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 15 \times 10 = 150$ 種

10.某校護理系招收轉學生 7 人，若分配給甲班 3 人、乙班 2 人、丙班 2 人，則共有_____種不同的分配情形。

解答 210

解析 【法一】

$$C_3^7 \times C_2^4 \times C_2^2 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 1 = 35 \times 6 = 210 \text{ 種}$$

【法二】

$$\text{分配情形共有 } \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210 \text{ 種}$$

11.平面上共有相異 n 點，其中任三點均不共線，若此 n 點共可決定 28 條直線，則 $n =$ _____。

解答 8

解析 $\because C_2^n = 28 \quad \therefore \frac{n(n-1)}{2} = 28$

$$\Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow (n-8)(n+7) = 0 \Rightarrow n = 8 \text{ 或 } -7 \text{ (不合)}$$

12.設 m 為自然數，若 $2 \times C_2^m = 5 \times C_3^{m-1}$ ，則 m 之值為_____。

解答 5

解析 C_2^m 、 C_3^{m-1} 有意義，則 $m \geq 2$ 且 $m-1 \geq 3 \Rightarrow m \geq 4$

$$\because 2 \times C_2^m = 5 \times C_3^{m-1}$$

$$\therefore 2 \times \frac{m(m-1)}{2} = 5 \times \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}$$

但 $m \geq 4$ ， $m-1 \neq 0$

$$\Rightarrow m = 5 \times \frac{(m-2)(m-3)}{6} \Rightarrow 5m^2 - 31m + 30 = 0$$

$$\Rightarrow (m-5)(5m-6) = 0 \Rightarrow m = 5 \text{ 或 } \frac{6}{5} \text{ (不合)}$$

13.在坐標平面上有相異的 3 個圓和 2 條直線，至多可形成_____個交點。

解答 19

解析 $C_2^3 \times 2 + C_2^2 \times 1 + C_1^3 \times C_1^2 \times 2 = 6 + 1 + 12 = 19$ 個

14.自 4 根不同顏色但等長之吸管，任意挑出 3 根，攤在桌面上共可排成_____種樣式之正三角形。

解答 8

解析 $C_3^4 \times \frac{3!}{3} = 4 \times 2 = 8$ 種

↑
↑
三角形環排
先選吸管

15. 由甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人中，選出 4 人參加書法比賽，求所選 4 人必含甲且不含丙的選法有_____種。

解答 4

解析 由甲、乙、丙、丁、戊、己 6 人中，選出 4 人參加書法比賽，所選 4 人必含甲且不含丙，即從乙、丁、戊、己 4 人選出 3 人，有 $C_3^4 = C_1^4 = 4$ 種

16. $C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 =$ _____。

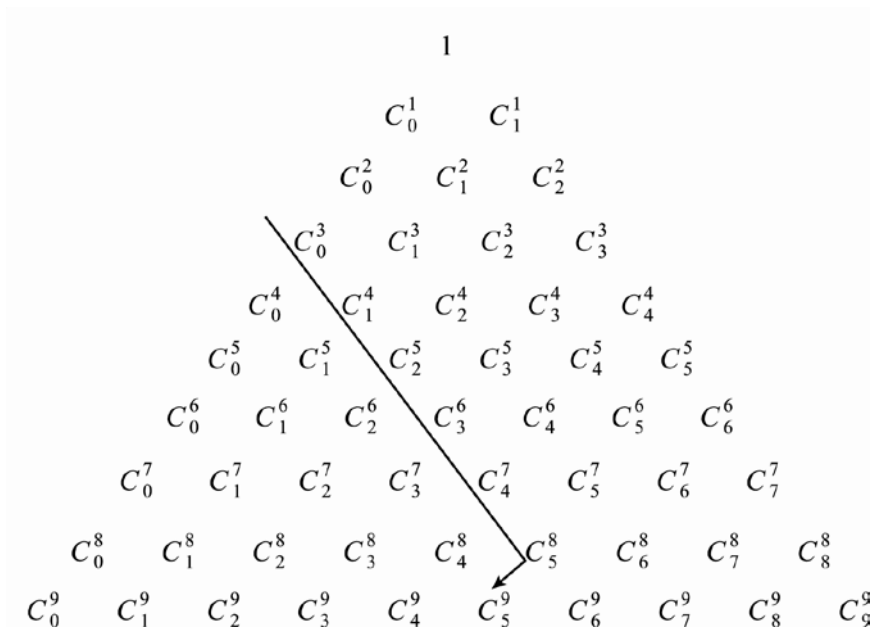
解答 126

解析 〈法一〉利用公式： $C_{m-1}^n + C_m^n = C_m^{n+1}$

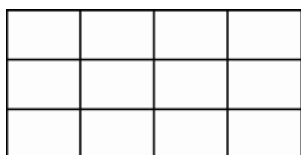
$$\begin{aligned} & C_0^3 + C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 \\ &= C_0^4 + C_1^4 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 \\ &= C_1^5 + C_2^5 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 \\ &= C_2^6 + C_3^6 + C_4^7 + C_5^8 \\ &= C_3^7 + C_4^7 + C_5^8 \\ &= C_4^8 + C_5^8 \\ &= C_5^9 = C_4^9 = 126 \end{aligned}$$

〈法二〉速算法：

由巴斯卡三角形，利用 $\searrow \swarrow$ 原則求之，如下圖：



17. 設下圖中每方格均為矩形，則共有_____個矩形。



解答 60

解析 直線的選法有 C_2^5 種，橫線的選法有 C_2^4 種，故所求為 $C_2^5 \times C_2^4 = 10 \times 6 = 60$

18. 正十二邊形的對角線共有_____條。

解答 54

解析 有 $C_2^{12} - 12 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} - 12 = 66 - 12 = 54$ 條

19. 設 m 、 n 為自然數，且 $m \leq n$ ，若 $P_m^n = 336$ ， $C_m^n = 56$ ，則 $m+n =$ _____。

解答 11

解析 $\because P_m^n = m! \times C_m^n$

$$\Rightarrow 336 = m! \times 56$$

$$\Rightarrow m! = 6 = 3!$$

$$\therefore m = 3$$

$$\text{又 } P_3^n = 336$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 8 \times 7 \times 6 \quad (\because n \in \mathbb{N})$$

$$\therefore n = 8$$

$$\text{故 } m+n = 3+8 = 11$$

20. 某羽球比賽，規定每位選手必須和所有其他選手各比賽一場，賽程總計為 45 場，則選手共有_____人。

解答 10

解析 設有 n 個人

$$\Rightarrow C_2^n = 45$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 45$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 90 = 10 \times 9 \quad (\because n \in \mathbb{N})$$

$$\therefore n = 10 \text{ (人)}$$