1-6 二項式定理

1.若 $x+y+z+u=12$，求其非負整數解有____________個。

解答 455

解析 $H^{4}_{12}=C^{15}_{12}=C^{15}_{3}=\dfrac{15\times14\times13}{3\times2\times1}=455$（個）

2.$(2x-y^2)^6$展開式中，x^4y^4項的係數為____________。

解答 240

解析 x^4y^4係數為$C^6_4\times2^4\times(-1)^2=15\times16\times1=240$

3.$(1-x)^5$展開得____________。

解答 $1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$

4.在$(x-3y)^{10}$的展開式中，x^6y^4項的係數為____________。

解答 17010

5.在$(x-\dfrac{1}{2x})^6$的展開式中，x^4項的係數為____________。

解答 -3

解析 $(x-\dfrac{1}{2}x^{-1})^6$的x^4項係數為$C^6_5\times1^5\times(-\dfrac{1}{2})^1=-3$

6.$(3x-\dfrac{1}{27x^2})^{12}$展開式中，$x^3$項的係數為(1)____________，常數項為(2)____________。

解答 (1)-220;(2)$\dfrac{55}{9}$

解析 (1)$(3x-\dfrac{1}{27}x^{-2})^{12}$的$x^3$係數為$C^{12}_9\times3^9\times(-\dfrac{1}{27})^3=-220$

(2)常數項為$C^{12}_8\times3^8\times(-\dfrac{1}{27})^4=\dfrac{55}{9}$

7.$[x+(y+z)^2]^8$展開式中，$x^5y^4z^2$項之係數為____________。

解答 840

解析 $[x+(y+z)^2]^8=C^8_0x^8+\cdots\cdots+C^8_3x^5[(y+z)^2]^3+\cdots\cdots$

又$(y+z)^6=C^6_0y^6+\cdots\cdots+C^6_2y^4z^2+\cdots\cdots$

$\therefore$ $x^5y^4z^2$項的係數$=C^8_3\times C^6_2=56\times15=840$

8.$(2x-\dfrac{1}{x^2})^8$展開後，x^2項的係數 $=$____________。

解答 1792

解析 $(2x-x^{-2})^8$的x^2項係數為$C^8_6\times2^6\times(-1)^2=1792$

9.化簡$C^n_0+\dfrac{C^n_1}{5}+\dfrac{C^n_2}{5^2}+\cdots\cdots+\dfrac{C^n_n}{5^n}=$____________。

解答 $(\frac{6}{5})^n$

解析 由二項式定理知：

$$(1+\frac{1}{5})^n$$

$$=C_0^n\times1^n\times(\frac{1}{5})^0+C_1^n\times1^{n-1}\times(\frac{1}{5})^1+C_2^n\times1^{n-2}\times(\frac{1}{5})^2+\cdots\cdots+C_n^n\times1^0\times(\frac{1}{5})^n$$

$$=C_0^n+\frac{C_1^n}{5}+\frac{C_2^n}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{C_n^n}{5^n}$$

$\therefore$ 原式$=(\frac{6}{5})^n$

10.在$\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{10}$展開式中$x^6$項的係數為____________。

解答 -20

解析 $\left(x-\frac{2}{x^3}\right)^{10}$展開式的一般項為$C_r^{10}\,x^{10-r}\left(-\frac{2}{x^3}\right)^r=C_r^{10}\,(-2)^r\,x^{10-4r}$

則$10-4r=6\quad\Rightarrow\quad r=1$

故x^6項的係數為$C_1^{10}\,(-2)^1=-20$

11.若$\left(ax+\frac{1}{x^2}\right)^9$展開整理後，常數項為 84，則$a$之值為____________。

解答 ±1

解析 $\left(ax+\frac{1}{x^2}\right)^9$展開式的一般項為$C_r^9\,(ax)^{9-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r=C_r^9\,a^{9-r}x^{9-3r}$

則$9-3r=0\quad\Rightarrow\quad r=3$

故常數項為$C_3^9\,a^6=84\quad\Rightarrow\quad 84a^6=84\quad\Rightarrow\quad a^6=1\quad\Rightarrow\quad a=\pm1$

12.試求$C_1^9+C_2^9+C_3^9+\cdots+C_9^9$之值為____________。

解答 511

解析 $\because\quad C_0^9+C_1^9+C_2^9+C_3^9+\cdots+C_9^9=2^9$

$\therefore\quad C_1^9+C_2^9+C_3^9+\cdots+C_9^9=2^9-C_0^9=512-1=511$

13.設n為正奇數，若$1000<C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots+C_n^n<2000$，則$n$之值為____________。

解答 11

解析 $\because\quad C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$

$\therefore\quad 1000<2^{n-1}<2000$

又$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$

$\Rightarrow\quad n-1=10\quad\Rightarrow\quad n=11$

14.二項式$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{14}$之展開式中，$x^4$項的係數為____________。

解答 91

解析 〈法一〉

$\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{14}$ 展開式的一般項為

$C_r^{14}\left(\sqrt{x}\right)^r\left(\dfrac{1}{x}\right)^{14-r}=C_r^{14}\,x^{\frac{3}{2}r-14}$

當 $\dfrac{3}{2}r-14=4 \quad\Rightarrow\quad r=12$

$\therefore$ 所求係數 $=C_{12}^{14}=C_2^{14}=91$

〈法二〉

由 $\dfrac{14!}{12!2!}\times\left(\sqrt{x}\right)^{12}\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\dfrac{14\times13}{2\times1}\times x^6\times x^{-2}=91x^4$

$\therefore$ 所求係數為 91

15.已知 $\left(kx+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 展開式中，常數項為 240 ，且 $k>0$ ，則 k 值為__________。

解答 2

解析 $\left(kx+\dfrac{1}{x^2}\right)^6$ 展開式的一般項為

$C_r^6\left(kx\right)^r\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{6-r}=C_r^6\,k^r x^{3r-12}$

令 $3r-12=0 \quad\Rightarrow\quad r=4$

即常數項 $=C_4^6\times k^4=240 \quad\Rightarrow\quad k=\pm2$（$-2$ 不合）

$\therefore\quad k=2$