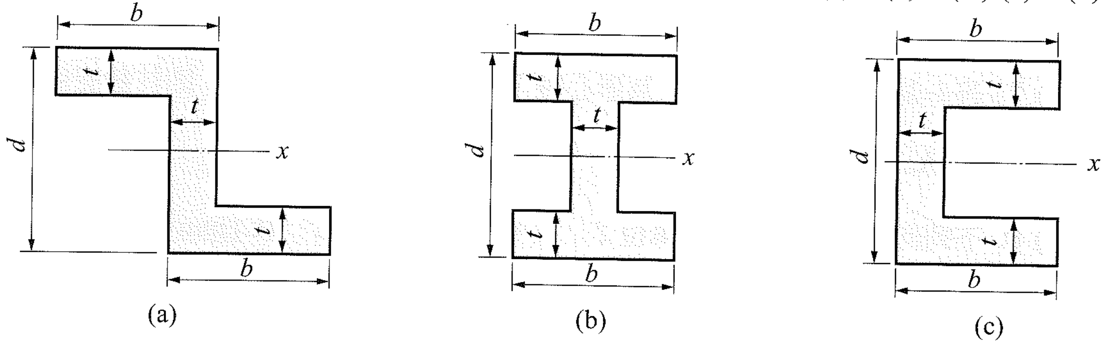
(C)**16.** 已知矩形面積之寬為 b，高為 h，今若將寬增加一倍，高減少一半，則截面係數為原來的 (A) 4 倍 (B) 2 倍 (C) $\frac{1}{2}$ 倍 (D) $\frac{1}{4}$ 倍。

(B)**17.** 已知一平面之面積為 10 mm^2，設其對平行於形心軸之某軸的迴轉半徑為 2 mm，則其對該軸之慣性矩為 (A) 20 (B) 40 (C) 60 (D) 80 mm^4。

(C)**18.** 設圓之直徑為 d，則對相切於圓之切線的迴轉半徑為 (A) $\frac{1}{2}d$ (B) $\frac{\sqrt{5}}{2}d$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{4}d$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}d$。

11-5 (B)**19.** 組合面積之慣性矩為各簡單幾何面積對組合面積之形心軸的慣性矩之 (A)差 (B)和 (C)積 (D)平方和。

(D)**20.** 如圖(1)所示，在(a)、(b)及(c)三種面積中，對水平形心軸（x 軸）慣性矩之大小關係為 (A) (a) > (b) > (c) (B) (a) > (c) > (b) (C) (c) > (a) > (b) (D) (a) = (b) = (c)。



圖(1)

計算題

Part1：基本題

11-2 **1.** 有一面積為 50mm^2，其慣性矩 $I_x = 400mm^4$，若 x 軸為形心軸，且與 s 軸（平行 x 軸）相距 4 mm，試求 s 軸之慣性矩 I_s。

答 $I_s = I_x + AL^2$

$= 400 + 50 \times 4^2$

$= 1200\ mm^4$

2. 已知三角形之底為 b，高為 h，試求其對高之一半且平行底邊之軸的慣性矩。

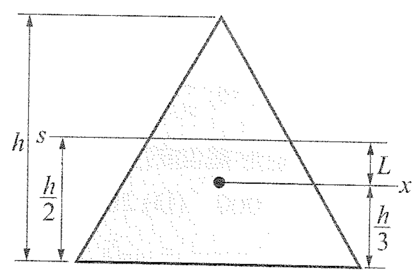
答 三角形如右圖所示。

$L = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$

$I_s = I_x + AL^2$

$= \frac{bh^3}{36} + \frac{bh}{2} \times (\frac{h}{6})^2$

$= \frac{bh^3}{24}$



3. 如圖(2)所示，某面積之形心軸為 y 軸，面積為 40 mm^2，其對 y_1 軸之慣性矩為 1200 mm^4，試求此面積對 y_2 軸之慣性矩。

答 (1) $I_{y1} = I_y + AL^2$

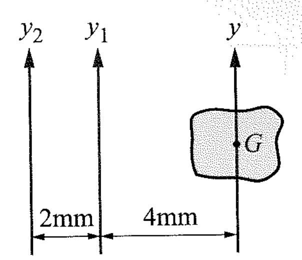
$1200 = I_y + 40 \times 4^2$

$I_y = 560\ mm^4$

(2) $I_{y2} = I_y + AL^2$

$= 560 + 40 \times 6^2$

$= 2000\ mm^4$



圖(2)

11-3 **4.** 已知一平面之面積為 10 mm^2，其對某軸之慣性矩為 160 mm^4，試求其對某軸之迴轉半徑。

答 $K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$

$= \sqrt{\frac{160}{10}}$

$= 4\ mm$

5. 已知一直徑為 100mm 的圓形面積，試求其對形心軸及切線的迴轉半徑。

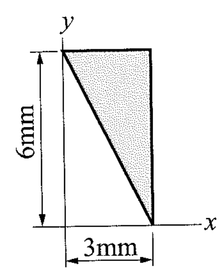
答 (1) $K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi \times 100^4}{64}}{\frac{\pi \times 100^2}{4}}} = 25\ mm$

(2) $K_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{5\pi \times 100^4}{64}}{\frac{\pi \times 100^2}{4}}} = 25\sqrt{5}\ mm$

11-4 **6.** 如圖(3)所示，試求倒置三角形面積對 x 軸及 y 軸之慣性矩。

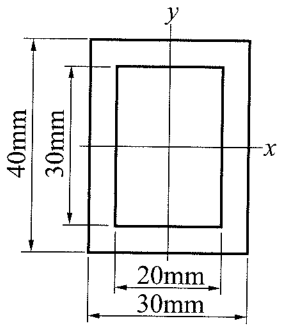
答 (1) $I_x = \frac{bh^3}{4} = \frac{3 \times 6^3}{4} = 162\ mm^4$

(2) $I_y = \frac{b^3h}{4} = \frac{3^3 \times 6}{4} = 40.5\ mm^4$

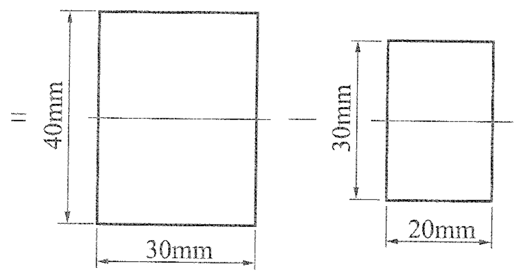


圖(3)

11-5 **7.** 如圖(4)所示，試求中空矩形面積對水平形心軸之慣性矩及截面係數。



圖(4)



圖(4 解)

答 將組合面積視為大矩形 A_1 減小矩形 A_2，如圖(4 解)所示。

(1) $I_x = I_{x1} - I_{x2}$

$= \dfrac{30\times40^3}{12} - \dfrac{20\times30^3}{12}$

$= 160000 - 45000$

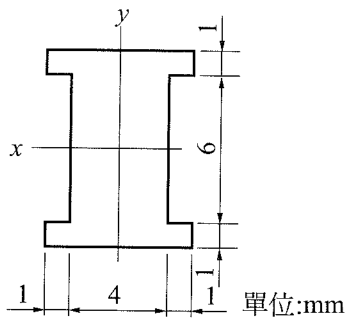
$= 115000\ \text{mm}^4$

(2) $Z_x = \dfrac{I_x}{y}$

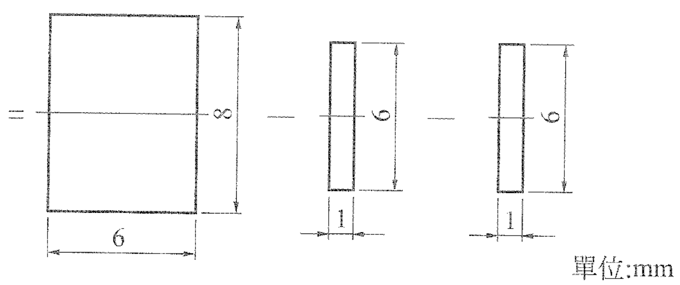
$= \dfrac{115000}{20}$

$= 5750\ \text{mm}^3$

8. 如圖(5)所示，試求組合面積對水平形心 x 軸之慣性矩及截面係數。



圖(5)



圖(5 解)

答 將組合面積視為大矩形 A_1 減小二個小矩形 A_2 及 A_3，如圖(5 解)所示。

(1) $I_x = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3}$

$= \dfrac{6\times8^3}{12} - \dfrac{1\times6^3}{12} - \dfrac{1\times6^3}{12}$

$= 256 - 18 - 18$

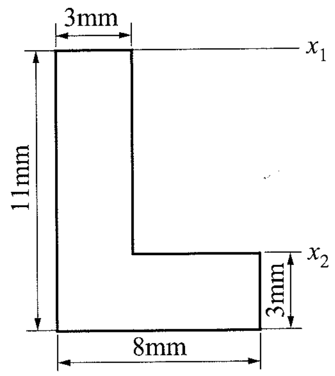
$= 220\ \text{mm}^4$

(2) $Z_x = \dfrac{I_x}{y}$

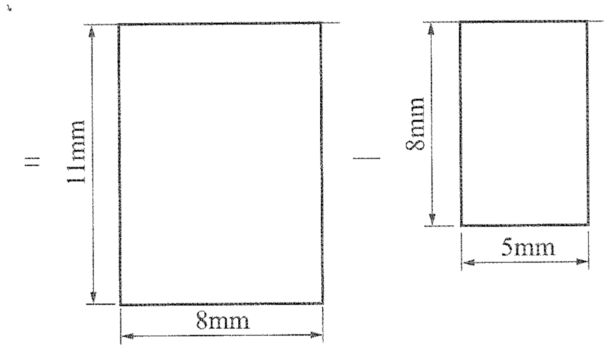
$= \dfrac{220}{4}$

$= 55\ \text{mm}^3$

9. 如圖(6)所示，試求此組合面積對 x_1 軸及 x_2 軸之慣性矩。



圖(6)

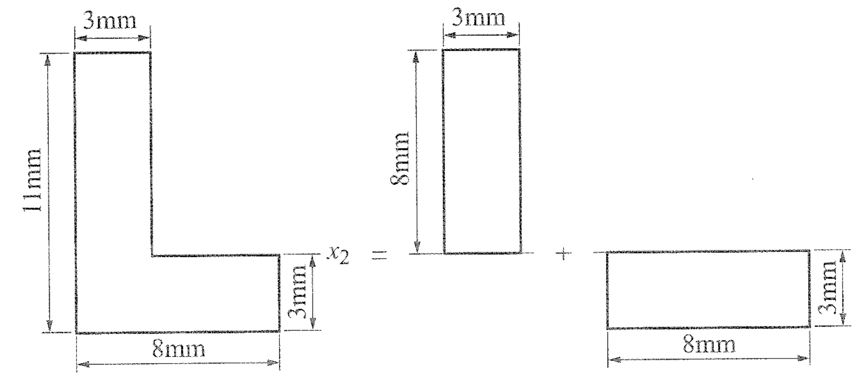


圖(6 解-1)

答 (1) 將面積視為大矩形 A_1 減小矩形 A_2，如圖(6 解-1)所示。

$I_{x1} = \dfrac{8\times11^3}{3} - \dfrac{5\times8^3}{3} = \dfrac{10648}{3} - \dfrac{2560}{3} = 2696\ \text{mm}^4$

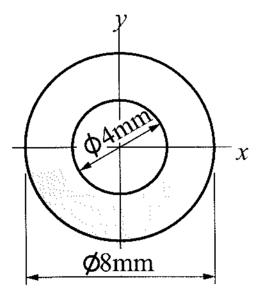
(2) 將組合面積視為 A_1 及 A_2 二個矩形，如圖(6 解-2)所示。



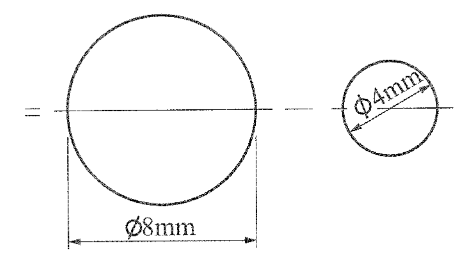
圖(6 解-2)

$I_{x2} = \dfrac{3\times8^3}{3} + \dfrac{8\times3^3}{3} = 512 + 72 = 584\ \text{mm}^4$

10. 如圖(7)所示，試求圓環形面積之慣性矩及極慣性矩。



圖(7)



圖(7 解)

答 將圓環形面積視為大圓 A_1 減小圓 A_2，如圖(7 解)所示。

(1) $I_x = I_y = \dfrac{\pi\times8^4}{64} - \dfrac{\pi\times4^4}{64} = 64\pi - 4\pi = 60\pi\ \text{mm}^4$

(2) $J = I_x + I_y = 60\pi + 60\pi = 120\pi\ \text{mm}^4$

Part2：進階題

11-5 **11.** 有一中空圓柱，若其外徑為 4mm，內徑為 2mm，試求其(1)極慣性矩、(2)極截面係數及(3)極迴轉半徑。

答 (1) $I_x = I_y = \dfrac{\pi\times 4^4}{64} - \dfrac{\pi\times 2^4}{64} = 4\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{15\pi}{4}\ \text{mm}^4$

$J = I_x + I_y = \dfrac{15\pi}{4} + \dfrac{15\pi}{4} = \dfrac{15\pi}{2}\ \text{mm}^4$

(2) $Z_p = \dfrac{J}{R} = \dfrac{\frac{15\pi}{2}}{2} = \dfrac{15\pi}{4}\ \text{mm}^3$

(3) $K_p = \sqrt{\dfrac{J}{A}} = \sqrt{\dfrac{\frac{15\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}(4^2-2^2)}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}\ \text{mm}$

12. 一邊長為 6mm 之正方形斷面，其中心有一直徑 4mm 的圓孔，試求其對形心軸的慣性矩。

答 $I_x = I_{x1} - I_{x2}$

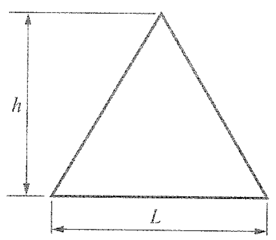
$= \dfrac{6\times 6^3}{12} - \dfrac{\pi\times 4^4}{64}$

$= 108 - 4\pi$

$= 95.44\ \text{mm}^4$

13. 設正三角形之邊長為 L，試求其平行於底邊之形心軸的慣性矩。

答 三角形如右圖所示。

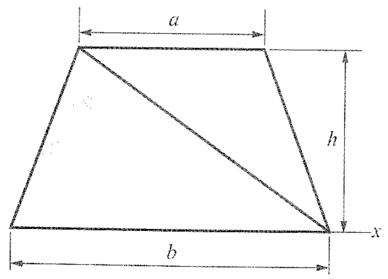


$h = L\sin 60° = L\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}L$

$I_x = \dfrac{bh^3}{36} = \dfrac{L\times(\frac{\sqrt{3}}{2}L)^3}{36} = \dfrac{\sqrt{3}L^4}{96}$

14. 設一梯形面積之上底為 a，下底為 b，高為 h，試求其對下底之慣性矩。

答 梯形如右圖所示。

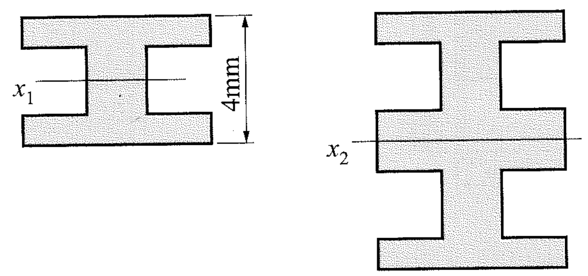


$I_x = I_{x1} + I_{x2}$

$= \dfrac{bh^3}{12} + \dfrac{ah^3}{4}$

$= \dfrac{h^3}{12}(3a+b)$

15. 如圖(8)所示，若一斷面(a)圖時，其面積 $A = 10\ \text{mm}^2$，對水平形心軸之慣性矩 $I_{x1} = 160\ \text{mm}^4$。今若將兩個相同斷面(a)組合成(b)圖，試求(b)圖對其水平形心軸之慣性矩 I_{x2}。



(a)　(b)

圖(8)

答 (1) 求(a)圖對底邊之慣性矩：

$I_s = I_{x1} + AL^2$

$= 160 + 10\times 2^2$

$= 200\ \text{mm}^4$

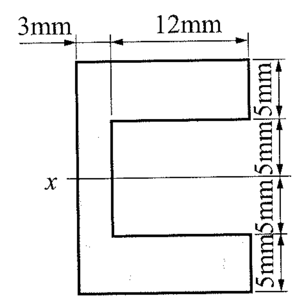
(2) (b)圖對形心之慣性矩即為(a)圖對底邊慣性矩之 2 倍，故：

$I_{x2} = 2I_s$

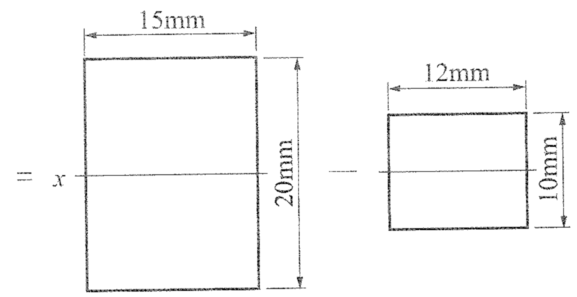
$= 2\times 200$

$= 400\ \text{mm}^4$

16. 如圖(9)所示之面積，試求其水平形心軸之慣性矩。



圖(9)



圖(9 解)

答 將組合面積視為大矩形 A_1 減小矩形 A_2，如圖(9 解)所示。

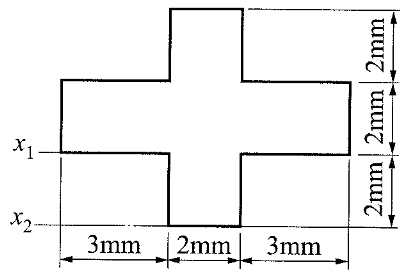
$I_x = I_{x1} - I_{x2}$

$= \dfrac{15\times 20^3}{12} - \dfrac{12\times 10^3}{12}$

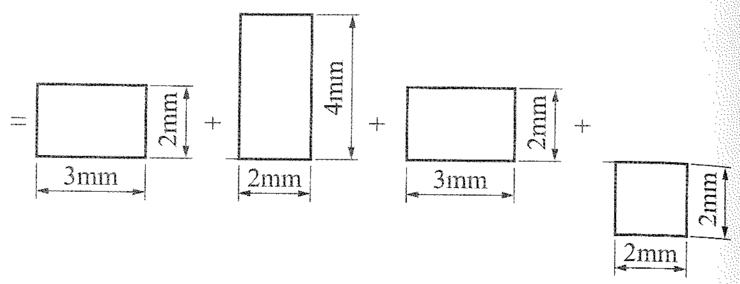
$= 10000 - 1000$

$= 9000\ \text{mm}^4$

17. 如圖(10)所示，試求此組合面積對 x_1 軸及 x_2 軸之慣性矩。



圖(10)

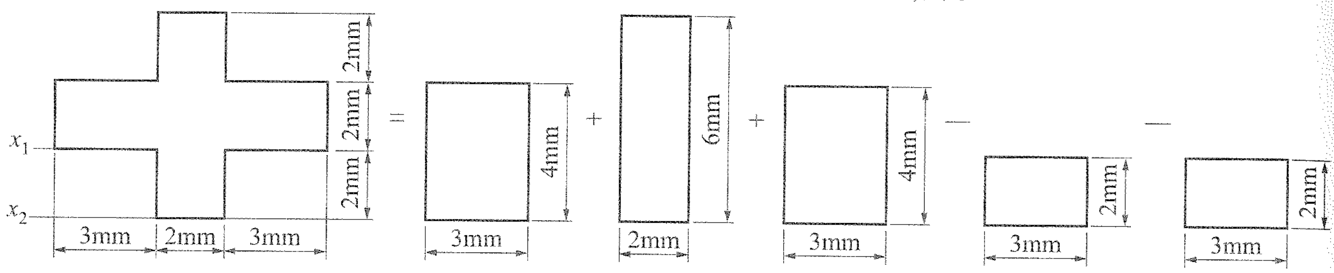


圖(10 解-1)

答 (1) 將組合面積視為 A_1、A_2、A_3 及 A_4 四個矩形，如圖(10 解-1)所示。

$$I_{x1}=I_1+I_2+I_3+I_4=\frac{3\times2^3}{3}+\frac{2\times4^3}{3}+\frac{3\times2^3}{3}+\frac{2\times2^3}{3}=8+\frac{128}{3}+8+\frac{16}{3}=64\text{ mm}^4$$

(2) 將組合面積視為 A_1、A_2 及 A_3 減 A_4 及 A_5，如圖(10 解-2)所示。

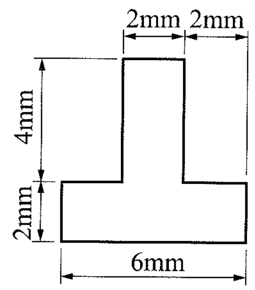


圖(10 解-2)

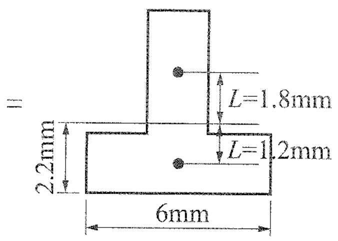
$$I_{x2}=I_1+I_2+I_3-I_4-I_5=\frac{3\times4^3}{3}+\frac{2\times6^3}{3}+\frac{3\times4^3}{3}-\frac{3\times2^3}{3}-\frac{3\times2^3}{3}$$

$$=64+144+64-8-8=256\text{ mm}^4$$

18. 如圖(11)所示，試求此組合面積水平形心軸及垂直形心軸之慣性矩。



圖(11)



圖(11 解)

答 (1) 將組合面積視為 A_1 及 A_2 二個矩形，如圖(11 解)所示，並求組合面積之重心。

$$\bar{y}=\frac{A_1y_1+A_2y_2}{A_1+A_2}=\frac{8\times4+12\times1}{8+12}=\frac{44}{20}=2.2\text{mm}$$

以平行軸定理求組合面積之 x 軸慣性矩：

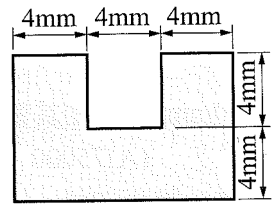
$$I_x=I_{x1}+I_{x2}=\left[\frac{2\times4^3}{12}+(4\times2)\times1.8^2\right]+\left[\frac{6\times2^3}{12}+(6\times2)\times1.2^2\right]$$

$$=36.59+21.28=57.87\text{mm}^4$$

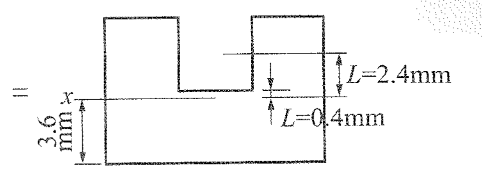
(2) 求組合面積之 y 軸慣性矩：

$$I_y=I_{y1}+I_{y2}=\frac{4\times2^3}{12}+\frac{2\times6^3}{12}=2.67+36=38.67\text{ mm}^4$$

19. 如圖(12)所示之面積，試求其水平形心軸之慣性矩。



圖(12)



圖(12 解)

答 (1) 將組合面積視為大矩形 A_1 減小矩形 A_2，如圖(12 解)所示，並求組合面積之重心。

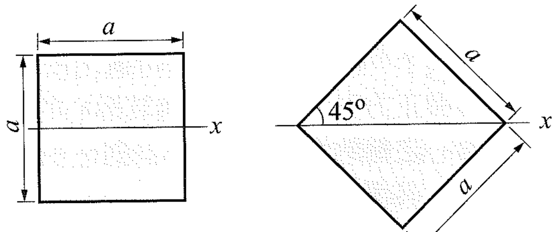
$$\bar{y}=\frac{A_1y_1-A_2y_2}{A_1-A_2}=\frac{96\times4-16\times6}{96-16}=\frac{288}{80}=3.6\text{mm}$$

(2) 以平行軸定理求組合面積之 x 軸慣性矩

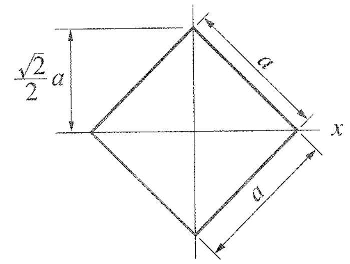
$$I_x=I_{x1}+I_{x2}=\left[\frac{12\times8^3}{12}+(12\times8)\times0.4^2\right]-\left[\frac{4\times4^3}{12}+(4\times4)\times2.4^2\right]$$

$$=527.36-113.49=413.87\text{mm}^4$$

20. 如圖(13)所示，二正方形面積之邊長均為 a，試求(a)圖與(b)圖對其形心軸慣性矩之比值及截面係數之比值。



(a)　(b)



圖(13 解)

圖(13)

答 (1) (a)圖之 I_a 及 Z_a 分別為：

$$I_a=\frac{a^4}{12}\qquad Z_a=\frac{I_a}{y}=\frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a}{2}}=\frac{a^3}{6}$$

(2) (b)圖之 I_b 及 Z_b 分別為：(如圖(13 解)所示)

$$I_b=2\times\frac{\sqrt{2}a\times(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^3}{12}=\frac{a^4}{12}$$

$$Z_b=\frac{I_b}{y}=\frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$$

(3) 二者 I 及 Z 之比值為

$$\frac{I_a}{I_b}=\frac{\frac{a^4}{12}}{\frac{a^4}{12}}=1\qquad \frac{Z_a}{Z_b}=\frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{\sqrt{2}a^3}{12}}=\sqrt{2}$$