數學 C(III) 2-1～2-3 平時考詳解

總分

__________年__________班　座號__________姓名__________

一、填充題 (13 格　每格 0 分　共 0 分)

1.求下列各式之值：

(1) $\sqrt[6]{64^7}+\sqrt[5]{243^3}+\sqrt[4]{49^2}=$__________，(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{81}\sqrt{729\times 9^{-2}}}=$__________。

解答　(1)162 ;(2) $\dfrac{1}{3}$

解析　(1)原式 $=\left[\left(2^6\right)^7\right]^{\frac{1}{6}}+\left[\left(3^5\right)^3\right]^{\frac{1}{5}}+\left[\left(7^2\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}=2^7+3^3+7=162$

(2)原式 $=\left[3^{-4}\times\left(3^6\times\left(3^2\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[3^{-4}\times\left(3^6\times 3^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$

$=\left[3^{-4}\times\left(3^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}=\left(3^{-4}\times 3\right)^{\frac{1}{3}}=\left(3^{-3}\right)^{\frac{1}{3}}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

2.設 $a>0$ ，$b>0$ ，化簡下列各式為 $a^r b^s$ 的型式:

(1) $\sqrt[4]{a^3}\times\sqrt[3]{b^2}=$__________，(2) $\dfrac{\sqrt{ab^3}}{\sqrt[3]{a^2b}}=$__________。

解答　(1) $a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}$;(2) $a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{7}{6}}$

解析　(1)原式 $=\left(a^3\right)^{\frac{1}{4}}\times\left(b^2\right)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}$

(2)原式 $=\dfrac{\left(ab^3\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(a^2b\right)^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}\times b^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{7}{6}}$

3.設 $a>0$ ，若 $a^{2x}=3$ ，則

(1) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=$__________，(2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}=$__________。

解答　(1) $\dfrac{7}{3}$;(2) $\dfrac{14}{3}$

解析　(1)原式 $=\dfrac{\left(a^x\right)^3+\left(a^{-x}\right)^3}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{\left(a^x+a^{-x}\right)\left[\left(a^x\right)^2-a^x\times a^{-x}+\left(a^{-x}\right)^2\right]}{a^x+a^{-x}}$

$=a^{2x}-1+a^{-2x}=3-1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{3}$

(2)上下同乘以 a^x 可得

$$\text{原式}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\frac{3^2+\frac{1}{3}}{3-1}=\frac{14}{3}$$

4.設 $3^x=5^y=15$，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=$____________。

解答 1

解析 $\begin{cases}3^x=15\\5^y=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=15^{\frac{1}{x}}\\5=15^{\frac{1}{y}}\end{cases}$，故 $15^{\frac{1}{x}}\times15^{\frac{1}{y}}=3\times5=15$ $\quad\therefore\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

5.設 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt[4]{27}$，$c=\sqrt{3\sqrt{3}}$，$d=\sqrt[6]{9}$，則 a、b、c、d 之大小順序為____________。

解答 $b=c>a>d$

解析 $a=3^{\frac{1}{2}}$，$b=3^{\frac{3}{4}}$，$c=3^{\frac{3}{4}}$，$d=3^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ b=c>a>d$

6.化簡 $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^6(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6=$____________。

解答 64

解析 $(\sqrt{5}-\sqrt{3})^6(\sqrt{5}+\sqrt{3})^6=[(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})]^6=[5-3]^6=2^6=64$

7.設 $y=\log_{x-3}9-2x$，若 y 有意義，則 x 之範圍為____________。

解答 $3<x<\frac{9}{2}$，且 $x\neq4$

解析 底數 $x-3>0$ 且 $x-3\neq1$ $\Rightarrow$ $x>3$ 且 $x\neq4$

真數 $9-2x>0$ $\Rightarrow$ $9>2x$ $\Rightarrow$ $\frac{9}{2}>x$

故 $3<x<\frac{9}{2}$，且 $x\neq4$

8.求下列各式中 x 之值：(1)若 $\log_x 512=3$，則 $x=$____________，(2)若 $\log_{\sqrt{2}}x=4$，則 $x=$____________，(3)若 $\log_2(\log_8 x)=-1$，則 $x=$____________。

解答 (1) 8 ;(2) 4 ;(3) $2\sqrt{2}$

解析 (1) $x^3=512=2^9=(2^3)^3$ $\Rightarrow$ $x=2^3=8$

(2) $x=(\sqrt{2})^4=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4=2^2=4$

(3) $\log_8 x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $x=8^{\frac{1}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

9.求下列各式之值：

(1) $\log_{0.01}0.001+\log_{0.1}100+\log_{0.01}100=$____________，

(2) $\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{6}}\log_{\sqrt{5}}125=$____________，

(3) $2\log_{10}\frac{5}{3}-\log_{10}\frac{7}{4}+2\log_{10}3+\frac{1}{2}\log_{10}49=$ ____________。

解答 (1) $-\frac{3}{2}$;(2) 2;(3) 2

解析 (1)原式 $=\log_{10^{-2}}10^{-3}+\log_{10^{-1}}10^{2}+\log_{10^{-2}}10^{2}=\frac{-3}{-2}+\frac{2}{-1}+\frac{2}{-2}=-\frac{3}{2}$

(2)原式 $=\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{6}}\log_{5^{\frac{1}{2}}}5^{3}=\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{6}}6$

$=\log_{\sqrt{2}}\log_{6^{\frac{1}{2}}}6=\log_{\sqrt{2}}2=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2=2$

(3)原式 $=\log_{10}\left(\frac{5}{3}\right)^{2}-\log_{10}\frac{7}{4}+\log_{10}3^{2}+\log_{10}49^{\frac{1}{2}}$

$=\log_{10}\frac{25}{9}-\log_{10}\frac{7}{4}+\log_{10}9+\log_{10}7$

$=\log_{10}\left(\frac{25}{9}\times\frac{4}{7}\times9\times7\right)=\log_{10}100=\log_{10}10^{2}=2$

10.設 $a>0$ 且 $a\neq1$，若 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{a}}}=a^{x}$ ，則 $x=$ ____________。

解答 $-\frac{5}{18}$

解析 $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{a}}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{a\times a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{5}{18}}=a^{x}$ 故 $x=-\frac{5}{18}$

11. $(\log_3 4+\log_3 2)(\log_2 3+\log_4 27)=$ ____________。

解答 $\frac{15}{2}$

解析 $\log_3 4+\log_3 2=2\log_3 2+\log_3 2=3\log_3 2$

$\log_2 3+\log_4 27=\log_2 3+\frac{3}{2}\log_2 3=\frac{5}{2}\log_2 3$

$\therefore$ 原式 $=3\log_3 2\times\frac{5}{2}\log_2 3=3\times\frac{\log 2}{\log 3}\times\frac{5}{2}\times\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{15}{2}$

12.已知 $(5\times125^{4})^{2}\div625^{6}=5^{n}$ ，則 $n=$ ____________。

解答 2

解析 $(5\times125^{4})^{2}\div625^{6}=\left[5^{1}\times(5^{3})^{4}\right]^{2}\div(5^{4})^{6}=\left[5^{1}\times5^{12}\right]^{2}\div5^{24}=(5^{13})^{2}\div5^{24}$

$=5^{26}\div5^{24}=5^{26-24}=5^{2}$

則 $n=2$

13.已知$(0.7)^{3x-10}<0.49$，則x之範圍為____________。

解答　$x>4$

解析　$(0.7)^{3x-10}<0.49 \Rightarrow (0.7)^{3x-10}<(0.7)^2$

$\because$ 底數為 0.7 $\therefore$ $3x-10>2 \Rightarrow x>4$