

數學 C(III) 平時考 第一章 詳解

一、填充題 (17 格 每格 0 分 共 0 分)

1. 設三角形三個角的度數成等差數列，已知其最小角是 15° ，則其最大角是_____度。

解答 105

解析 設三個角為 $15^\circ, 15^\circ + d, 15^\circ + 2d$

$$\Rightarrow 15^\circ + 15^\circ + d + 15^\circ + 2d = 180^\circ \Rightarrow d = 45^\circ$$

$$\therefore \text{最大角 } 15^\circ + 2 \times 45^\circ = 105^\circ$$

2. 已知 $3x$ 為 $4x - 3$ 和 $8x + 9$ 的等差中項，則 $x =$ _____。

解答 -1

解析 $\therefore \frac{(4x-3)+(8x+9)}{2} = 3x \quad \therefore x = -1$

3. 在 x 與 24 之間插入 6 個數，使其成一等差數列，若總和為 108 (含 x 與 24)，則 $x =$ _____。

解答 3

解析 $a_1 = x, a_8 = 24,$

$$\therefore S_8 = 108 \quad \therefore \frac{(x+24) \times 8}{2} = 108$$

$$\Rightarrow x = 3$$

4. 已知級數 $7 + 8 - 9 + 10 + 11 - 12 + \dots$ 到第 99 項的和為 S ，其中級數每一項的絕對值成等差數列且 3 的倍數項為負數，則 $S =$ _____。

解答 1782

解析 所求 $= (7+8-9) + (10+11-12) + \dots$

$$= \underbrace{(7+10+\dots)}_{33\text{項}} + \underbrace{(8+11+\dots)}_{33\text{項}} - \underbrace{(9+12+\dots)}_{33\text{項}}$$

$$= \frac{[2 \times 7 + (33-1) \times 3] \times 33}{2} + \frac{[2 \times 8 + (33-1) \times 3] \times 33}{2} - \frac{[2 \times 9 + (33-1) \times 3] \times 33}{2}$$

$$= 1782$$

5. 設 $-2, a, b, 10$ 成等差數列，又 a, b, x 成等比數列，則 x 值為_____。

解答 18

6. 設一等差數列第 6 項為 28，第 9 項為 43，則前 20 項之和為_____。

解答 1010

7. 設一凸多邊形諸內角度數成等差數列，公差為 5° ，其最小的角為 120° ，則此凸多邊形邊數是_____。

解答 9

解析 設邊數 $= n$

$$a_n = 120 + (n-1) \times 5 = 115 + n \times 5 \quad (\text{度})$$

$$S_n = \frac{120 + (115 + n \times 5)}{2} \times n = (n-2) \times 180 \quad (\text{度})$$

$$\Rightarrow n^2 - 25n + 144 = 0 \Rightarrow n = 9 \text{ 或 } 16$$

$$(16 \text{ 不合 } \because a_{16} = 115^\circ + 16 \times 5^\circ = 195^\circ > 180^\circ)$$

8. 設 $0 < a < b < c < d$ 且 a, b, c, d 成等比數列，若 $a + c = 30, b + d = 60$ ，則

(1) 此數列之公比 = _____，(2) $a =$ _____。

解答 (1) 2; (2) 6

解析 設公比為 r ，且 $b = ar, c = ar^2, d = ar^3, r > 0$

$$\begin{cases} a + c = a + ar^2 = 30 \cdots \textcircled{1} \\ b + d = ar + ar^3 = 60 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{a(1+r^2)}{ar(1+r^2)} &= \frac{30}{60} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 2 \\ \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\text{代入 } \textcircled{1} \quad a + 4a = 30, 5a = 30, a = 6$$

9. 在 3 與 -96 間插入 4 個數，使成等比數列，則(1)公比為 _____，(2)插入的第 4 個數為 _____，(3)插入之 4 數和為 _____。

解答 (1) -2 ; (2) 48; (3) 30

解析 $a_1 = 3, a_6 = -96, n = 6$

$$\Rightarrow a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow -96 = 3 \times r^5 \quad \therefore r = -2$$

$$\text{插入的第 4 個數為 } -96 \text{ 的前一項，故為 } \frac{-96}{-2} = 48$$

$$\text{插入的 4 個數為 } -6, 12, -24, 48 \Rightarrow \text{其和} = 30$$

10. 級數 $\sum_{k=1}^{100} (3k - 4)$ 的和為 _____。

解答 14750

解析 $\sum_{k=1}^{100} (3k - 4) = 3 \sum_{k=1}^{100} k - \sum_{k=1}^{100} 4 = 3 \times \frac{100 \times (100 + 1)}{2} - 100 \times 4 = 14750$

11. 等比級數 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{10}$ 的和為 _____。

解答 2047

解析 $a_1 = 1, r = \frac{2}{1} = 2 \quad \therefore S_{11} = \frac{1 \times (1 - 2^{11})}{1 - 2} = 2047$

12. 設 a, b, c 為實數，若 b 是 a 與 c 的等比中項且 $abc = 125$ ，則 $b =$ _____。

解答 5

解析 $\because b$ 是 a 與 c 的等比中項 $\therefore b^2 = ac$

$$\Rightarrow \text{已知 } abc = 125 \quad \therefore b \times ac = b \times b^2 = 125$$

$$\text{故 } b = 5$$

13. 若等比級數 $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ 的和大於 1000，則 n 的最小值為 _____。

解答 9

解析 $S_{n+1} = \frac{1 \times (1 - 2^{n+1})}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$

$$\because 2^{n+1} - 1 > 1000 \quad \therefore n \geq 9$$

故 n 的最小值為 9

14. 已知一個等比數列 $\langle a_n \rangle$ ， $a_4 = 16$ ， $a_6 = 64$ ，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} =$ _____。

解答 2046 或 682

解析 設首項為 a_1 ，公比為 r

$$\begin{cases} a_4 = 16 \\ a_6 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^3 = 16 \\ a_1 r^5 = 64 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 2, r = 2 \text{ 或 } a_1 = -2, r = -2$$

$$(1) a_1 = 2, r = 2 \text{ 時} \quad S_{10} = \frac{2 \times (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2046$$

$$(2) a_1 = -2, r = -2 \text{ 時} \quad S_{10} = \frac{-2 \times [(-2)^{10} - 1]}{-2 - 1} = 682$$

故為 2046 或 682

15. 有一等比數列共有 10 項，已知奇數項的和為 40，偶數項的和為 120，則此等比數列的公比為_____。

解答 3

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 40 \\ a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 120 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 = 40 \cdots \textcircled{1} \\ a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + a_1 r^7 + a_1 r^9 = 120 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \quad \frac{a_1 r (1 + r^2 + r^4 + r^6 + r^8)}{a_1 (1 + r^2 + r^4 + r^6 + r^8)} = \frac{120}{40} \Rightarrow r = 3$$

16. 小於 100 的自然數中，所有 5 的倍數和為_____。

解答 950

$$\text{解析} \quad a_1 = 5, a_n = 95, n = 95 \div 5 = 19 \Rightarrow S = \frac{19(5 + 95)}{2} = 19 \times 50 = 950$$

17. 設 $\sum_{k=1}^{15} a_k = 10$ ， $\sum_{k=1}^{15} b_k = 15$ ，且 $a_{16} = 2$ ， $b_{16} = -4$ ，則 $\sum_{k=1}^{16} (2a_k + 3b_k + 1) =$ _____。

解答 73

$$\text{解析} \quad \sum_{k=1}^{16} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_k + a_{16} = 10 + 2 = 12$$

$$\sum_{k=1}^{16} b_k = \sum_{k=1}^{15} b_k + b_{16} = 15 - 4 = 11$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{16} (2a_k + 3b_k + 1) = 2 \sum_{k=1}^{16} a_k + 3 \sum_{k=1}^{16} b_k + \sum_{k=1}^{16} 1 = 2 \times 12 + 3 \times 11 + 16 \times 1 = 73$$